7 класс

Задача 7.1. Соревнования в джунглях.

В джунглях вместо «человеческих» единиц измерения длины животные пользуются тремя другими: «попугаями», «мартышками» и «удавами». Как-то раз Попугай, Мартышка и Удав решили устроить соревнование по бегу. Когда Мартышка, пробежав дистанцию за 3,6 минуты, оглянулась, оказалось, что Попугай отстал от неё на 4,2 «удава». Когда же, наконец, и Попугай прибежал к финишу, выяснилось, что Удаву осталось ползти ещё 5/14 длины дистанции. Известно, что скорость Попугая на дистанции была 140 «попугаев» в минуту, скорость Мартышки — 25 «мартышек» в минуту, скорость Удава — 3 «удава» в минуту, а все животные стартовали одновременно.
1. Определите, сколько «попугаев» в 1 «мартышке» и в 1 «удаве».
2. Найдите длину дистанции и выразите её в «попугаях».

Ответ: 1) 1 «мартышка» = 7 «попугаев», 1 «удав» = 30 «попугаев»; 2) 630 «попугаев».

Решение: Пусть L — длина дистанции, 1 «мартышка» = m «попугаев», а 1 «удав» = n «попугаев». Тогда скорость Мартышки равна $25m$ «попугаев»/мин, скорость Удава — $3n$ «попугаев»/мин. Так как Мартышка пробежала дистанцию за 3,6 мин,

$$L = 25m \text{ «попугаев»/мин} \times 3{,}6 \text{ мин} = 90m \text{ «попугаев»}.$$

В момент финиша обезьяны Попугаю осталось пробежать расстояние $4{,}2n$ «попугаев». Следовательно

$$L = 140 \text{ «попугаев»/мин} \times 3{,}6 \text{ мин} + 4{,}2n \text{ «попугаев»} \quad \Rightarrow \quad 504 + 4{,}2n = 90m.$$

Всю дистанцию Попугай пробегает за время $t = (90m/140)$ мин. За это же время удав должен проползти $L - 5L/14 =$ $= 9L/14$, то есть $9/14 \cdot 90m$ «попугаев». Отсюда следует, что

$$9/14 \cdot 90m \text{ «попугаев»} = 3n \text{ «попугаев»/мин} \times (90m/140) \text{ мин} \quad \Rightarrow \quad 9/14 = 3n/140 \quad \Rightarrow \quad n = 30.$$

Соответственно,

$$m = \frac{504 + 4{,}2n}{90} = 7,$$

а длина дистанции равна $L = 90m$ «попугаев» = 630 «попугаев».

Критерии:

1) Записано, что $L = v_{\text{мартышки}} \cdot 3{,}6$ мин или аналог . . . . 1 балл
2) Записано, что $L = v_{\text{попугая}} \cdot 3{,}6$ мин + 4,2 «удава» или аналог . . . . 1 балл
3) Записано верное выражение для времени t, за которое Попугай пробегает дистанцию . . . . 1 балл
4) Записано, что $9L/14 = v_{\text{удава}} t$ . . . . 1 балл
5) Правильно найдено, сколько «попугаев» в одном «удаве» . . . . 2 балла
6) Правильно найдено, сколько «попугаев» в одной «мартышке» . . . . 2 балла
7) Найдено верное значение длины дистанции в «попугаях» . . . . 2 балла

Задача 7.2. Смешарики на прогулке.

В один прекрасный день Бараш вышел из дома и, напевая по дороге песенку, не спеша пошёл к домику Кроша. Одновременно с этим сам Крош тоже вышел из своего домика и пошёл навстречу. Однако, если Бараш шёл всегда с одной и той же скоростью 0,8 м/с, скорость Кроша всё время менялась (см. рис. 7.1). Дойдя до домика Бараша, Крош развернулся, тут же пошёл обратно и через час после начала прогулки вернулся к себе.

1. Каково расстояние между домиками Кроша и Бараша?
2. На каком расстоянии от домика Бараша Смешарики встретятся первый раз?
3. На каком расстоянии от домика Бараша они встретятся второй раз?

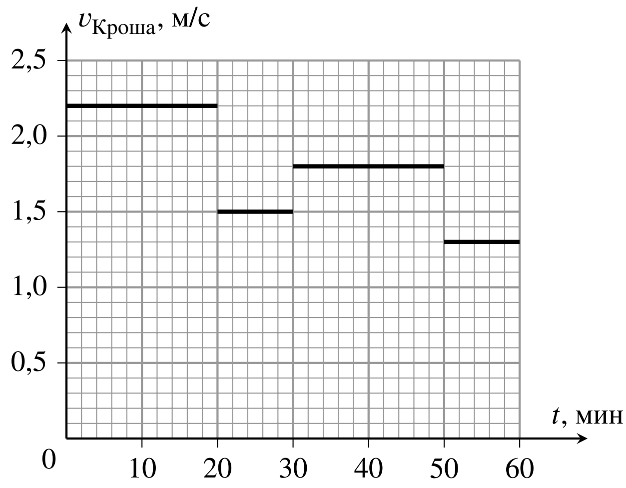


Рис. 7.1.

Ответ: 1) 3240 м; 2) 864 м; 3) 2352 м.

Решение: Определим общий путь, пройденный Крошем за час. По графику он составляет

$$s_{\text{Кроша}} = 2{,}2\ \text{м/с} \cdot 1200\ \text{с} + 1{,}5\ \text{м/с} \cdot 600\ \text{с} + 1{,}8\ \text{м/с} \cdot 1200\ \text{с} + 1{,}3\ \text{м/с} \cdot 600\ \text{с} = 6480\ \text{м}.$$

Так как за этот час Крош успел сходить туда-обратно, полученное значение равно двум расстояниям между домиками Смешариков. Таким образом, от домика Кроша до домика Бараша 3240 м.

Первая встреча состоится, когда Смешарики идут навстречу друг другу. Найдём время их встречи, для чего заметим, что за первые 20 мин Крош и Бараш сблизились бы на $(2{,}2\ \text{м/с} + 0{,}8\ \text{м/с}) \cdot 1200\ \text{с} = 3600$ м, но это больше, чем 3240 м. Значит друзья встретятся раньше, чем за 20 мин. Время их первой встречи равно

$$t_1 = \frac{3240\ \text{м}}{2{,}2\ \text{м/с} + 0{,}8\ \text{м/с}} = 1080\ \text{с}.$$

Отсюда получим, что место первой встречи находится на расстоянии $0{,}8\ \text{м/с} \cdot 1080\ \text{с} = 864$ м от домика Бараша.

Вторая встреча произойдёт, когда Крош нагонит Бараша на обратном пути. В этом случае Крош должен пройти на 3240 м больше. За первые 30 мин разница в пройденном пути составит

$$(2{,}2\ \text{м/с} - 0{,}8\ \text{м/с}) \cdot 1200\ \text{с} + (1{,}5\ \text{м/с} - 0{,}8\ \text{м/с}) \cdot 600\ \text{с} = 2100\ \text{м},$$

что меньше 3240 м. Оставшиеся 1140 м Крош сокращает эту разницу со скоростью $1{,}8\ \text{м/с} - 0{,}8\ \text{м/с} = 1$ м/с. Следовательно, он догонит Бараша через

$$30\ \text{мин} + \frac{1140\ \text{м}}{1\ \text{м/с}} = 2940\ \text{с}.$$

За это время Бараш отойдёт от своего домика на $2940\ \text{с} \cdot 0{,}8\ \text{м/с} = 2352$ м.

Критерии:

1) Найден общий путь, пройденный Крошем (6480 м) . . . . 2 балла
2) Найдено расстояние между домиками (3240 м) . . . . 1 балл
3) Правильно найдено время первой встречи . . . . 2 балла
4) Правильно найден ответ на второй вопрос . . . . 1 балл
5) Правильно найдено время второй встречи . . . . 3 балла
6) Правильно найден ответ на третий вопрос . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

В случае, если при ответе на второй и/или третий вопросы учащимся допущена небольшая арифметическая ошибка (не сильно изменившая ответ), в пп. 4 и/или 6 ставить 0,5 балла.

Задача 7.3. На дачу и обратно.

Мальчик Никита поехал с родителями на дачу. Дорога туда была свободной, и средняя скорость движения автомобиля составила 75 км/ч. На следующий день, по дороге обратно, автомобиль попал в пробку и ехал со скоростью 15 км/ч втрое дольше по времени, чем заняла накануне вся дорога от дома до дачи. Оставшийся отрезок пути до дома был посвободнее, и автомобиль смог разогнаться до скорости 40 км/ч. Определите среднюю скорость автомобиля на **обратном** пути от дачи до дома.

Ответ: 20 км/ч.

Решение: Пусть t — время, потраченное на путь до дачи. Тогда расстояние между домом и дачей $s = 75$ км/ч$\cdot t$. Время, потраченное в пробке на обратном пути, равно $3t$, а оставшееся время до дома обозначим t_1. Так как пути туда и обратно совпадают,

$$75\ \text{км/ч} \cdot t = 15\ \text{км/ч} \cdot 3t + 40\ \text{км/ч} \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{3}{4}t.$$

Отсюда найдём среднюю скорость на обратном пути:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{3t + t_1} = \frac{75\ \text{км/ч} \cdot t}{3t + 3t/4} = \frac{300}{15}\ \text{км/ч} = 20\ \text{км/ч}.$$

Критерии:

1) Записано, что $s = 75$ км/ч $\cdot\, t$ . . . . 2 балла
2) Записано уравнение 75 км/ч $\cdot\, t = 15$ км/ч $\cdot\, 3t + 40$ км/ч $\cdot\, t_1$ или аналог . . . . 3 балла
3) Найдено выражение для t_1 (или его аналог) . . . . 2 балла
4) Найдена средняя скорость . . . . 3 балла

Указания проверяющим:

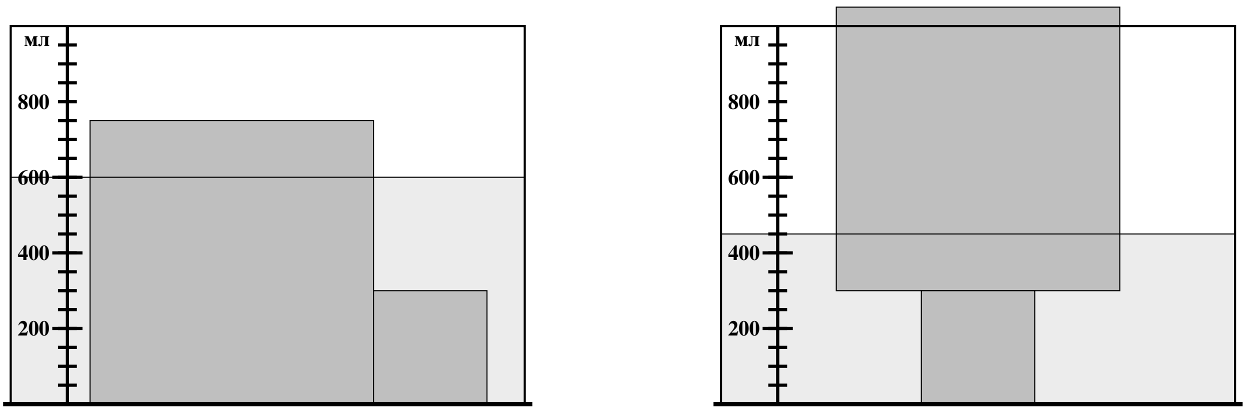
1) Если в решении берётся конкретное значение t, s и т.п. (например, $t = 1$ ч), такое решение оценивается максимум в 1 балл.
2) Выражение из п. 1 критериев может быть написано сразу внутри уравнения из п. 2. В этом случае баллы за п. 1 ставятся.

Задача 7.4. И так, и так одна пятая.

На дно мерного сосуда положили два кубика, большой и маленький, после чего в этот сосуд стали медленно, с постоянной скоростью наливать воду. Ровно через минуту воду отключили, и оказалось, что маленький кубик полностью находится в воде, а большой высовывается из неё на одну пятую своего объёма (рис. 7.2а). Когда же большой кубик поставили на маленький сверху (рис. 7.2б), большой оказался погружён в воду на всё ту же одну пятую часть своего объёма.

1. Пользуясь рисунками, определите отношение длин рёбер большого и маленького кубика.
2. Найдите объём каждого кубика в см^3.
3. Определите, с какой скоростью (в мл/с) наливали в мерный сосуд воду.

Стенки мерного сосуда вертикальны, а в процессе переноса кубиков вода из сосуда не выливается.



а) б)

Рис. 7.2.

Ответ: 1) 2,5; 2) 16 см^3, 250 см^3; 3) 6,4 мл/с.

Решение: Определим высоты кубиков по шкале мерного сосуда (в неких условных единицах). Большой кубик имеет высоту, равную 750 условных единиц, так как его верхний край доходит до отметки 750 мл. Высота маленького кубика равна 300 условных единиц. Следовательно, отношение высот кубиков равно 750/300 = 2,5.

Пусть V_0 — объём воды в сосуде, налитый за 1 мин, а $V_м$ — объём маленького кубика. Тогда объём большого будет равен $V_б = (2{,}5)^3 V_м = 15{,}625 V_м$. Разница в объёме, погружённом в воду, между первым и вторым рисунком составляет $3V_б/5$. С другой стороны, эта разница равна 600 см^3 − 450 см^3 = 150 см^3. Приравнивая, получим, что объём большого куба равен $V_б = 250$ см^3. Соответственно, объём маленького куба равен $V_м = 250/15{,}625$ см^3 = = 16 см^3.

На первом рисунке большой кубик погружён на 4/5 своего объёма, поэтому

$$600\ \text{см}^3 = \frac{4}{5} \cdot V_б + V_м + V_0 \quad \Rightarrow \quad 600\ \text{см}^3 = 200\ \text{см}^3 + 16\ \text{см}^3 + V_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = 384\ \text{см}^3.$$

Так как объём V_0 наливается в сосуд за 60 с, скорость, с которой наливалась вода, равна

$$u = \frac{384\ \text{мл}}{60\ \text{с}} = 6{,}4\ \text{мл/с}.$$

Критерии:

1) Указан (явно или неявно) способ определения отношения рёбер . . . . . 1 балл
2) Найдено верное отношение длин рёбер . . . . . 1 балл
3) Найдено верное отношение объёмов кубиков . . . . . 1 балл
4) Предложен корректный способ определения объёма кубика (любого из двух) . . . . . 2 балла
5) Правильно найден объём большого кубика . . . . . 1 балл
6) Правильно найден объём маленького кубика . . . . . 1 балл
7) Правильно найден объём воды в сосуде . . . . . 2 балла
8) Найдено верное значение u . . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

Если поставлены баллы за пункты 5 и/или 6, балл за п. 4 ставится автоматически.

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Трижды треть.

Красная Шапочка пошла в гости к бабушке. Первую треть пути она шла не спеша по лесной дорожке, но затем, встретив знакомого Волка, остановилась с ним поболтать. Обменявшись новостями, девочка пошла дальше. Придя к бабушке, Шапочка подсчитала, что с Волком она разговаривала треть всего времени своего путешествия, а её средняя скорость на всём пути (с учётом остановки) составила треть от скорости на последнем участке. Найдите скорость, с которой девочка шла до встречи с Волком, если её средняя скорость (с учётом остановки) равна v. Считайте, что до встречи и после встречи Шапочка двигалась с постоянной скоростью.

Ответ: $3v/4$.

Решение: Если v — средняя скорость Красной Шапочки, то $3v$ — её скорость после встречи с Волком. Пусть t — общее время в пути. Тогда $t/3$ — время разговора с Волком, а $s = vt$ — общее расстояние, которое прошла девочка. После встречи с Волком она прошла $2s/3$, следовательно, время её движения после встречи равно

$$t_{\text{после}} = \frac{2s/3}{3v} = \frac{2vt}{9v} = \frac{2t}{9}.$$

Время движения девочки до встречи, соответственно, равно

$$t_{\text{до}} = t - t/3 - 2t/9 = 4t/9.$$

Определим теперь скорость Красной Шапочки до встречи с Волком:

$$v_{\text{до}} = \frac{s/3}{4t/9} = \frac{vt/3}{4t/9} = \frac{3v}{4}.$$

Критерии:

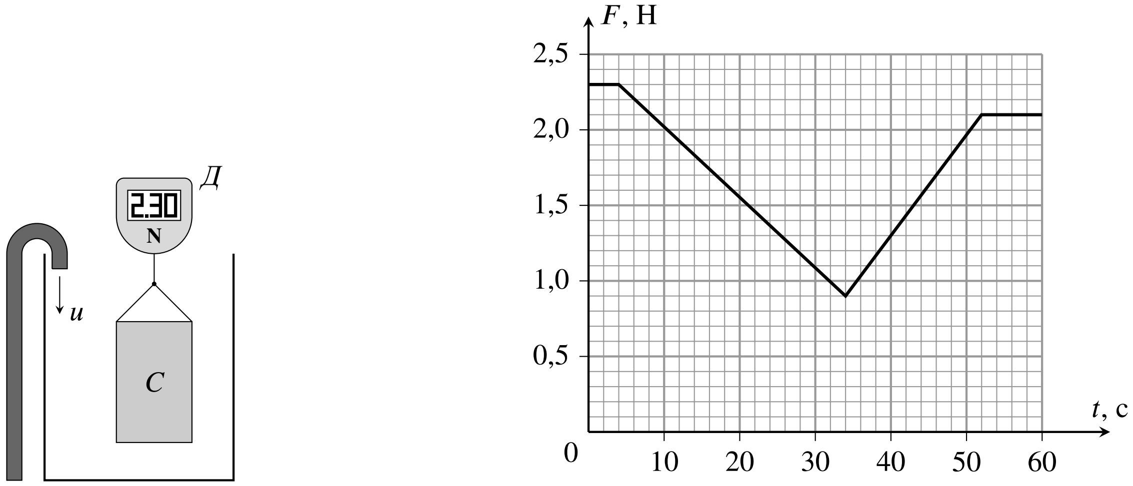
1) Записано $s_{\text{после}} = 2s/3$ (или аналог) . . . . 1 балл
2) Найдено, что $t_{\text{после}} = 2t/9$ (или аналог) . . . . 4 балла
3) Найдено, что $t_{\text{до}} = 4t/9$ (или аналог) . . . . 3 балла
4) Найдено, что $v_{\text{до}} = 3v/4$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если учащийся представил корректное решение, отличающееся от авторского, и получил правильный ответ, ставится полный балл независимо от способа решения (при условии, что способ корректный!).
2) Если учащийся привёл корректное, но неполное неавторское решение, позволившее ему получить балл за какой-то пункт, баллы за предыдущие пункты ставятся автоматически. То есть не может быть, что есть баллы за пункт 3, но нет баллов за пункты 1 и/или 2.
3) Если в решении берётся конкретное значение t, s и т.п. (например, $t = 1$ ч), такое решение оценивается максимум в 1 балл.

Задача 8.2. Вес стаканчика.

Восьмиклассница Арина, готовясь к олимпиаде по физике, решила поэкспериментировать. Она взяла латунный стаканчик C, подвесила его к электронному динамометру $Д$ и поместила внутрь большого сосуда (см. рис. 8.1а). После этого она стала медленно, с постоянной скоростью наливать в сосуд неизвестную жидкость и следить за показаниями динамометра. Зависимость показаний прибора F от времени t, в течение которого наливалась жидкость, девочка изобразила на графике (рис. 8.1б). Определите по этим данным плотность неизвестной жидкости, ёмкость стаканчика и скорость u (в мл/с), с которой наливается жидкость. Плотность латуни равна 8500 кг/м^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг. Объёмом нитей и креплений пренебречь.



а) б)

Рис. 8.1.

Ответ: 740 кг/м^3, 162 см^3, 9 мл/с.

Решение: По графику определим, что вес стаканчика в воздухе равен 2,3 Н. Отсюда получим, что его масса равна $m_л = 230$ г, а объём латуни составляет $V_л = m_л/\rho_л \approx 27$ см^3. «Провал» на графике связан с тем, что сначала жидкость поднимается вокруг стаканчика, уменьшая его вес, а затем, достигнув его краёв, наливается внутрь, и вес при этом начинает увеличиваться.

Разность между начальным и конечным значением веса равна силе Архимеда, действующей на стаканчик. Исходя из этого, найдём плотность жидкости ρ:

$$F_A = 2{,}3\text{ Н} - 2{,}1\text{ Н} = 0{,}2\text{ Н} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{F_A}{gV_л} = \frac{20\text{ г}}{27\text{ см}^3} \approx 0{,}74\text{ г/см}^3.$$

Разность между конечным и минимальным значением веса даёт вес налитой в стаканчик жидкости. Отсюда найдём объём жидкости в стаканчике, то есть его ёмкость

$$V = \frac{2{,}1\text{ Н} - 0{,}9\text{ Н}}{\rho g} = 162\text{ см}^3.$$

Так как стаканчик заполнялся в течение 52 с − 34 с = 18 с, получим значение скорости u:

$$u = \frac{V}{18\text{ с}} = 9\text{ мл/с}.$$

Критерии:

1) Верно найден объём стенок стаканчика . . . . 1 балл
2) Указан корректный способ определения плотности жидкости . . . . 2 балла
3) Верно найдено значение плотности жидкости . . . . 1 балл
4) Указан корректный способ определения ёмкости стаканчика . . . . 2 балла
5) Верно найдено значение ёмкости стаканчика . . . . 1 балл
6) Указан корректный способ определения u . . . . 1 балл
7) Верно найдено значение u . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

В пп. 1,3,5,7 допустимо небольшое отклонение от значений, полученных в авторском решении, вызванное погрешностями процедуры округления.

Задача 8.3. Лёд — туда, лёд — сюда.
В одном теплоизолированном сосуде находится 100 г воды при температуре 1 ℃. В другом теплоизолированном сосуде находятся при температуре −36 ℃ кусок льда массой 50 г и 100 г керосина. Лёд переносят в сосуд с водой и, дождавшись теплового равновесия, переносят обратно в сосуд с керосином. Определите установившуюся температуру в обоих сосудах. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), удельные теплоёмкости керосина и льда равны 2100 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Теплоёмкостью сосудов можно пренебречь. Керосин в рассматриваемом диапазоне температур является жидкостью. При переносе льда жидкости из сосудов не выливаются.

Ответ: 0 ℃ и −22,5 ℃.

Решение: Рассмотрим установление теплового равновесия между водой и перенесённым в неё льдом. Для нагрева 50 г льда от −36 ℃ до 0 ℃ требуется количество теплоты, равное

$$Q_л = c_л m_л \cdot 36\,℃ = 2100\ Дж/(кг\cdot℃) \cdot 0{,}05\ кг \cdot 36\,℃ = 3780\ Дж.$$

Вода при охлаждении до 0 ℃ отдаёт $Q_в = c_в m_в \cdot 1\,℃ = 420$ Дж, что меньше, чем $Q_л$. Но для того чтобы полностью кристаллизовать 100 г воды, требуется у неё «забрать» 33 кДж, а это уже больше, чем $Q_л$. Следовательно, установившая температура в сосуде с водой будет равна 0 ℃, причём часть воды должна превратиться в лёд. Найдём массу дополнительно образовавшегося льда $\Delta m_л$:

$$Q_в + \lambda \Delta m_л = Q_л \quad \Rightarrow \quad \Delta m_л = \frac{Q_л - Q_в}{\lambda} = \frac{3360\ Дж}{330000\ Дж/кг} \approx 10{,}2\ г.$$

Таким образом, мы переносим назад, в сосуд с керосином, уже 60,2 г льда при 0 ℃. Пусть t — установившая там температура, причём $t < 0\,℃$. Запишем уравнение теплового баланса между керосином и льдом:

$$c_к \cdot 100\ г \cdot (t + 36\,℃) = c_л \cdot 60{,}2\ г \cdot (0\,℃ - t).$$

Так как $c_к = c_л$, получим

$$t + 36\,℃ = -0{,}602t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{36\,℃}{1{,}602} \approx -22{,}5\,℃.$$

Критерии:

1) Предположение о том, что в сосуде с водой установится температура 0 ℃ . . . . 1 балл
2) Предположение о том, что масса льда при этом увеличится . . . . 1 балл
3) Обосновано, что в сосуде с водой установится температура 0 ℃ . . . . 2 балла
4) Найдена дополнительная масса льда (10 г) . . . . 2 балла
5) Правильно записано уравнение теплового баланса для системы «керосин-лёд» . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение установившейся температуры в системе «керосин-лёд» . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
1) Если обоснование (пункт 3) отсутствует, прочие пункты критериев оценивать независимо.
2) Предположение в пп. 1,2 может быть не высказано явно, а подразумеваться формой уравнения теплового баланса. В этом случае баллы также ставятся.
3) В п. 6 допустимо небольшое отклонение от значения, полученного в авторском решении, вызванное погрешностями процедуры округления.

Задача 8.4. Давление в равновесии.
Система, состоящая из трёх невесомых блоков, однородной планки массой M и груза, находится в равновесии. Определите массу m груза и силу, с которой он давит на планку, если все нити в системе невесомы и трение в блоках отсутствует. Для удобства на планку нанесены штрихи, делящие её на равные части. Центр груза находится прямо над концом планки.

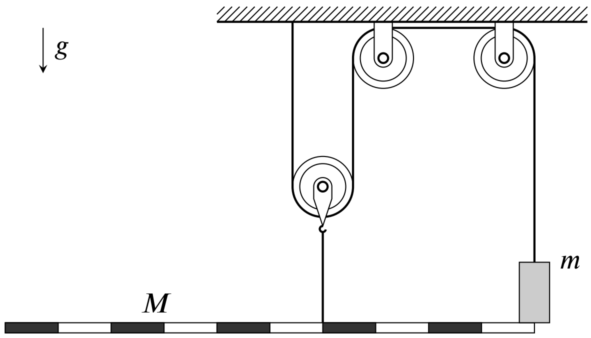


Рис. 8.2.

Ответ: $m = 7M/8$, $P = Mg/4$.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити, пропущенной через блоки, а P — сила, с которой груз давит на планку. Изобразим силы, действующие на планку — силу тяжести Mg, силу $2T$ натяжения нити, которая прикреплена к подвижному блоку и силу давления P (рис. 8.3а), и на груз — силу натяжения нити T, силу тяжести mg и силу, действующую со стороны планки P (рис. 8.3б). Запишем условие равновесия для сил, действуюших на планку и груз:

$$(\text{планка}) \quad 2T = Mg + P, \qquad (\text{груз}) \quad T + P = mg.$$

Запишем теперь правило моментов для планки относительно точки подвеса планки к блоку (l — длина одного деления на планке):

$$Mgl = P \cdot 4l \quad \Rightarrow \quad P = \frac{Mg}{4}.$$

Подставляя это выражение в полученные выше уравнения, получим

$$T = \frac{Mg + P}{2} = \frac{5Mg}{8},$$

$$mg = T + P = \frac{5Mg}{8} + \frac{Mg}{4} = \frac{7Mg}{8} \quad \Rightarrow \quad m = 7M/8.$$

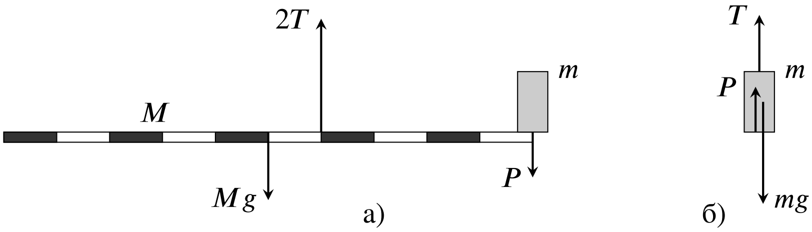


Рис. 8.3.

Критерии:

1) Указано, что сила натяжения подвеса планки вдвое больше силы натяжения подвеса груза . . . . 1 балл
2) Правильно записано условие равенства сил, действующих на одно из тел . . . . 2 балла
3) Правильно записано условие равенства сил, действующих на другое тело . . . . 2 балла
4) Правильно записано правило моментов относительно какой-либо точки . . . . 2 балла
5) Найдено верное значение массы m . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение силы давления P . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Указание в пункте 1 может быть сделано, например, на чертеже или в условиях равновесия. Балл в этом случае ставить.
2) В качестве одного из тел (пп. 2-4) может фигурировать система «груз-планка».
3) Вместо одного из условий равенства сил может быть написано правило моментов относительно какой-либо точки, отличной от использованной в п. 4. В случае, если условие написано верно, баллы ставятся за п.3.

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Разгон, торможение!

Как-то раз Пин сконструировал новый автомобиль и решил его испытать. В первый раз он, разогнавшись, тут же стал тормозить и остановился через время T после старта. Во второй раз Пин, разогнавшись, проехал какое-то время с постоянной скоростью, после чего затормозил и остановился. Оказалось, что оба раза Пин проехал одно и то же расстояние, но во втором заезде он потратил на $T/24$ больше времени, чем в первом. Определите, через какое время после старта во втором заезде он прекратил разгон и стал двигаться с постоянной скоростью. Разгон автомобиля Пина в обоих случаях происходит с одним и тем же постоянным ускорением, а модуль ускорения при торможении всегда в 4 раза больше, чем при разгоне.

Ответ: $0{,}6T$.

Решение: Рассмотрим первый заезд Пина. Пусть t_0 — время разгона, a — ускорение разгоняющегося автомобиля. Так как ускорение при торможении в четыре раза больше, а конечная скорость при разгоне равна начальной при торможении, время торможения автомобиля равно $t_0/4$. Поскольку общее время равно T, то $t_0 = 4T/5$. Длина всей дистанции, которую проезжает автомобиль, соответственно, равна

$$s = \frac{at_0^2}{2} + \frac{4a\cdot(t_0/4)^2}{2} = \frac{5at_0^2}{8} = \frac{2aT^2}{5}.$$

Рассмотрим теперь второй заезд. Пусть t — время разгона ($t < t_0$), а $t/4$ — время торможения. Длина дистанции не поменялась, а общее время в этот раз составляет $25T/24$. Таким образом, расстояние, которое Пин проехал с постоянной скоростью равно

$$s_1 = \frac{2aT^2}{5} - \frac{5at^2}{8},$$

а время проезда этого участка $t_1 = 25T/24 - 5t/4$. Так как скорость на этом участке равна $v_1 = at$, получим следующее соотношение:

$$s_1 = v_1t_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2aT^2}{5} - \frac{5at^2}{8} = at\cdot\left(\frac{25T}{24} - \frac{5t}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{5t^2}{8} - \frac{25Tt}{24} + \frac{2T^2}{5} = 0.$$

Решим это уравнение:

$$t = \left(\frac{5}{6} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{64}{25}}\right)T = \left(\frac{5}{6} \pm \frac{7}{30}\right)T.$$

Так как $t < t_0 = 4T/5$, берём меньший корень, и, следовательно, $t = 3T/5$.

Критерии:

1) Указано, что время разгона в 4 раза больше времени торможения . . . . 1 балл
2) Получена формула $s = 2aT^2/5$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записано верное выражение для s_1 . . . . 2 балла
4) Записано верное выражение для t_1 . . . . 2 балла
5) Получено уравнение, связывающее T и искомое время t . . . . 2 балла
6) Найдено, что $t = 3T/5$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) При наличии адекватного решения, альтернативного авторскому, необходимо разработать для него отдельные критерии, согласующиеся с общей концепцией, описанной выше.
2) Если учащийся получил **корректным**, но неавторским способом правильный ответ, у него должен стоять полный балл за задачу.
3) В пп. 3 и 4 не засчитывать тривиальные соотношения, вроде $s_1 = v_1t_1$.

Задача 9.2. Теплообмен в сосуде.
В теплоизолированный сосуд, где находится 46 г воды при температуре 60 ℃, помещают алюминиевый шарик, имеющий температуру 10 ℃. Из-за начавшегося теплообмена температура воды в начале эксперимента уменьшается со скоростью $\gamma_1 = 0{,}1$ ℃/с, а температура шарика (также в начале теплообмена) растёт со скоростью $\gamma_2 = 0{,}3$ ℃/с.
1. Определите массу алюминиевого шарика.
2. Определите температуру, которая установится в сосуде.
3. Каковы будут скорости изменения температуры воды и шарика тот в момент, когда температура воды упадёт до 50 ℃? Мощность теплообмена между водой и шариком пропорциональна текущей разности температур между ними.
Теплоёмкостью сосуда пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), удельная теплоёмкость алюминия — 920 Дж/(кг·℃).

Ответ: 1) 70 г; 2) 47,5 ℃; 3) 0,02 ℃/с и 0,06 ℃/с.

Решение: Так как сосуд теплоизолирован, то теплообмен происходит только между водой и алюминием. Соответственно, мощность теплоотвода от воды равна тепловой мощности передаваемой алюминию. Пусть за малое время $\Delta\tau$ температура изменяется (по модулю) со скоростью γ. Тогда тепловая мощность будет равна

$$N = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = cm \cdot \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = cm\gamma.$$

Отсюда, приравнивая мощность, отданную водой, и мощность переданную шарику, получим

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} \gamma_1 = c_{\text{ал}} m_{\text{ал}} \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad m_{\text{ал}} = \frac{c_{\text{в}} m_{\text{в}} \gamma_1}{c_{\text{ал}} \gamma_2} = \frac{4200 \cdot 46 \cdot 0{,}1}{920 \cdot 0{,}3}\ \text{г} = 70\ \text{г}.$$

Чтобы найти установившуюся температуру t_0, запишем уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}}(60\,℃ - t_0) = c_{\text{ал}} m_{\text{ал}}(t_0 - 10\,℃) \quad \Rightarrow \quad \frac{60\,℃ - t_0}{\gamma_1} = \frac{t_0 - 10\,℃}{\gamma_2} \quad \Rightarrow \quad 3(60\,℃ - t_0) = t_0 - 10\,℃ \quad \Rightarrow \quad t_0 = 47{,}5\,℃.$$

Пусть температура воды стала 50 ℃. Найдём температуру шарика в этот момент, используя равенство количества отданной и полученной теплоты с начала теплообмена:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}}(60\,℃ - 50\,℃) = c_{\text{ал}} m_{\text{ал}}(t_{\text{ал}} - 10\,℃) \quad \Rightarrow \quad 3(60\,℃ - 50\,℃) = t_{\text{ал}} - 10\,℃ \quad \Rightarrow \quad t_{\text{ал}} = 40\,℃.$$

Мощность теплоотдачи, по условию, пропорциональна разности температур. Сравним эти мощности, $N_{\text{нач}}$ и N_*, в начальный момент и в момент, когда температура воды равна 50 ℃ (k — некоторый коэффициент):

$$N_{\text{нач}} = k \cdot (60\,℃ - 10\,℃) = k \cdot 50\,℃, \qquad N_* = k \cdot (50\,℃ - 40\,℃) = k \cdot 10\,℃.$$

Они отличаются в 5 раз, следовательно скорости изменения температуры в этом случае будут также меньше в 5 раз:

$$\gamma_{1*} = \gamma_1/5 = 0{,}02\ ℃/\text{с}, \qquad \gamma_{2*} = \gamma_2/5 = 0{,}06\ ℃/\text{с}.$$

Критерии:

1) Записана формула $c_{\text{в}} m_{\text{в}} \gamma_1 = c_{\text{ал}} m_{\text{ал}} \gamma_2$ или аналог . . . . 2 балла
2) Найдено верное значение массы шарика . . . . 1 балл
3) Записано уравнение теплового баланса . . . . 1 балл
4) Найдено верное значение установившейся температуры . . . . 1 балл
5) Правильно найдена температура шарика в момент, когда температура воды 50 ℃ . . . . 2 балла
6) Правильно найдено отношение мощностей теплоотдачи в начальный и в искомый моменты . . . . . 2 балла
7) Получено верное значение γ_{1*} . . . . 0,5 балла
8) Получено верное значение γ_{2*} . . . . 0,5 балла

Указание проверяющим:
Может оказаться, что учащийся считает зависимость температуры от времени линейной не только при малых $\Delta\tau$, но и во всём диапазоне вплоть до установления теплового равновесия. Это неверно! Хотя ответы в пп. 2,4,5 могут совпасть с правильными. В этом случае весь блок (пункты 1-5) оценивается максимум в 1 балл!

Задача 9.3. Меняем знак.

К источнику постоянного напряжения подключена схема (рис. 9.1), состоящая из трёх резисторов с постоянным сопротивлением, одного переменного резистора и электронного амперметра. Полярность подключения прибора и значения сопротивлений постоянных резисторов указаны на схеме. Когда сопротивление переменного резистора равно 21 Ом, амперметр показывает 70 мА.

1. Каково напряжение источника, подключённого к схеме?
2. При каком значении сопротивления переменного резистора амперметр покажет −70 мА?

Внутренним сопротивлением амперметра пренебречь.

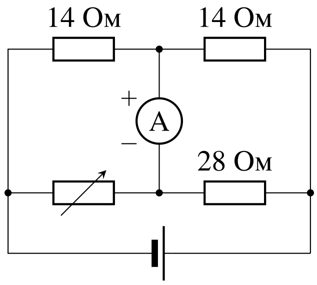


Рис. 9.1.

Ответ: 1) 18,62 В; 2) 40 Ом.

Решение: Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, верхний и нижний резисторы в каждой паре соединены параллельно, и напряжения на них равны.

В первом случае амперметр показывает положительное значение, следовательно ток через него течёт сверху вниз. Изобразим токи, текущие через резисторы (рис. 9.2а). Токи через резисторы 14 Ом и 28 Ом (правая пара) должны отличаться в 2 раза, поэтому мы обозначим их $2I$ и I соответственно. Через источник в этом случае течёт ток $3I$, а через резисторы в левой паре — $9I/5$ и $6I/5$. Это значит, что через амперметр течёт ток $I_A = I/5 = 0{,}07$ А, следовательно $I = 0{,}35$ А. Напряжение источника равно сумме напряжений на каждой паре резисторов:

$$U = 2I \cdot 14\text{ Ом} + 9I/5 \cdot 14\text{ Ом} = 19/5 \cdot 0{,}35\text{ А} \cdot 14\text{ Ом} = 18{,}62\text{ В}.$$

Во втором случае сопротивление переменного резистора равно R_x, а ток через амперметр течёт снизу вверх. Снова изобразим токи, текущие через резисторы (рис. 9.2б). Заметим, что токи, текущие через источник и правую пару резисторов, изменились по сравнению с первым случаем ($I' \neq I$!!), хотя их отношение осталось прежним. Запишем выражение для общего напряжения в цепи и приравняем напряжению на источнике:

$$U = 2I' \cdot 14\text{ Ом} + (2I' + I/5) \cdot 14\text{ Ом} = (4I' + I/5) \cdot 14\text{ Ом} \quad \Rightarrow \quad 19I/5 \cdot 14\text{ Ом} = (4I' + I/5) \cdot 14\text{ Ом} \quad \Rightarrow \quad I' = 0{,}9I.$$

Отсюда, приравнивая напряжения на переменном резисторе и параллельном с ним резисторе 14 Ом, найдём R_x:

$$(2I' + I/5) \cdot 14\text{ Ом} = (I' - I/5)R_x \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{2I \cdot 14\text{ Ом}}{0{,}7I} = 40\text{ Ом}.$$

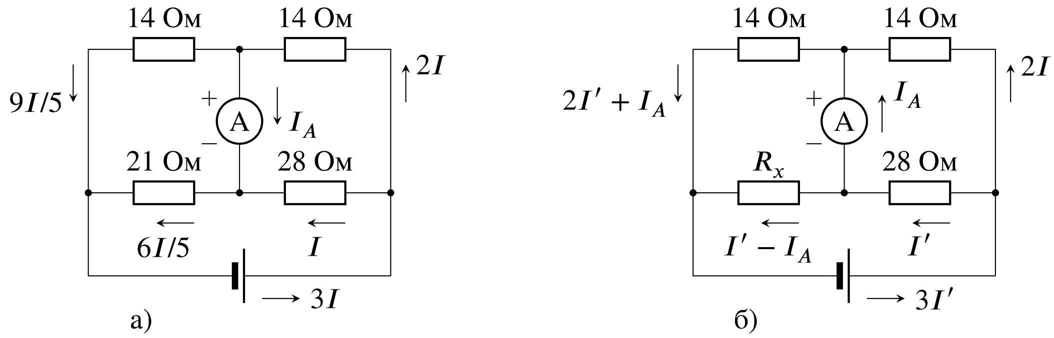


Рис. 9.2.

Критерии:

1) В первом случае токи через все резисторы выражены через один параметр . . . . 2 балла
2) Найдена связь между I_A и этим параметром . . . . 1 балл
3) Записано условие, связывающее напряжение источника, токи и сопротивления резисторов . . . . . . 1 балл
4) Найдено значение напряжения на источнике (18,62 В) . . . . 1 балл
5) Идея о том, что во 2м случае ток через амперметр имеет другое направление . . . . 1 балл
6) Правильно расставлены токи во втором случае . . . . 1 балл
7) Записано условие, связывающее напряжение источника, токи и сопротивления резисторов . . . . . 2 балла
8) Найдено верное значение R_x . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Пункты 1-3 критериев относятся к первому случаю (см. решение), а пп. 5-7 — ко второму.
2) Если учащийся нашёл числовые значения токов в пунктах 1 и 2, баллы за пп. 1 и 2 ставить.
3) Если на схеме во 2м случае ток через амперметр просто направлен вверх, а не вниз, балл за п.5 ставить.

Задача 9.4. Пружина в сообщающихся сосудах.

В сообщающихся сосудах с вертикальными стенками находится вода. Внутри левого сосуда находится подвешенный на лёгкой пружине металлический кубик, причём его нижнее основание касается поверхности воды (см. рис. 9.3). В тот же сосуд аккуратно налили 93 см^3 керосина, причём верхняя поверхность керосина оказалась вровень с верхней гранью кубика. Определите жёсткость пружины, если площадь поперечного сечения каждого сосуда равна 20 см^2, а ребро кубика имеет длину a = 3 см. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3, плотность металла больше плотностей обеих жидкостей. Керосин в правый сосуд не переливается и наружу не выливается. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

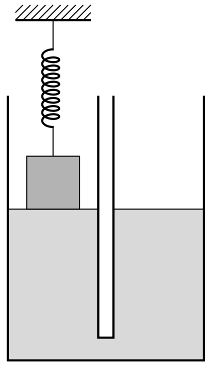


Рис. 9.3.

Ответ: 36 Н/м.

Решение: В результате наливания керосина в левый сосуд, кубик оказался полностью в него погружённым. Соответственно, на кубик дополнительно действует выталкивающая сила, сокращающая первоначальное растяжение пружины.

Пусть x — изменение длины пружины (по сравнению с начальным состоянием), k — её жёсткость, $h_к$ — высота слоя керосина, а $h_в$ — высота, на которую поднялся уровень воды в правом сосуде (рис. 9.4). Так как площади сосудов одинаковы, в левом сосуде уровень воды опустился также на $h_в$. Высота слоя керосина равна $h_к = x+a+h_в$. С другой стороны, из условия равенства давлений на уровне нижней границы керосина следует, что

$$\rho_к g h_к = \rho_в g \cdot 2h_в \quad \Rightarrow \quad h_в = \frac{\rho_к}{2\rho_в} \cdot h_к = 0{,}4 h_к.$$

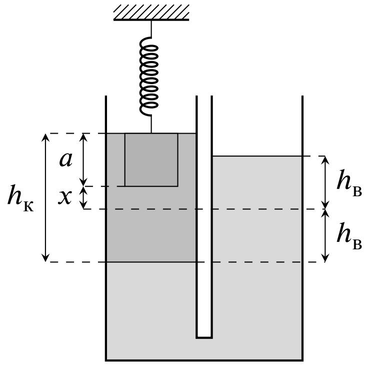


Рис. 9.4.

Объём керосина можно найти как $V_к = S h_к - a^3$, откуда получим, что

$$h_к = \frac{V_к + a^3}{S} = \frac{120\ \text{см}^3}{20\ \text{см}^2} = 6\ \text{см} \quad \Rightarrow \quad h_в = 2{,}4\ \text{см}.$$

Отсюда следует, что

$$x + a + h_в = h_к \quad \Rightarrow \quad x = h_к - h_в - a = 6\ \text{см} - 2{,}4\ \text{см} - 3\ \text{см} = 0{,}6\ \text{см}.$$

Так как изменение силы упругости равно силе Архимеда, действующей на кубик,

$$kx = \rho_к g a^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\rho_к g a^3}{x} = \frac{800\ \text{кг/м}^3 \cdot 10\ \text{м/с}^2 \cdot 27 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3}{0{,}006\ \text{м}} = 36\ \text{Н/м}.$$

Критерии:

1) Записана верная связь между $V_к$, $h_к$, S и a . . . . . 1 балл
2) Записана формула $h_к = x + a + h_в$ или аналог . . . . . 1 балл
3) Правильно записано условие равенства давлений . . . . . 2 балла
4) Записана формула $kx = \rho_к g a^3$ или аналог . . . . . 2 балла
5) Получена верная формула для нахождения k, содержащая только известные величины . . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение жёсткости пружины . . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если найдено верное числовое значение $h_к$, балл за п. 1 ставить.

2) Если корректным методом найдено значение k (без итоговой формулы), баллы за п. 5 (и все предыдущие) ставятся автоматически.

Задача 9.5. Полутень на плетень.

Мяч радиуса r освещается источником света в форме шара с радиусом $2r$. Расстояние между центром источника и центром мяча равно $5r$. Определите радиус **полутени**, которую мяч отбрасывает на плоский экран, если тень от мяча является точкой. Прямая, проходящая через центры источника и мяча, перпендикулярна экрану.

Ответ: $5r$.

Решение: Так как тень мяча является точкой, общие внешние касательные, проведённые к источнику и мячу, пересекаются в точке O, лежащей в плоскости экрана (см. рис. 9.5). Из подобия $\triangle O_1AO$ и $\triangle O_2CO$ следует, что

$$\frac{O_1A}{O_2C} = \frac{O_1O}{O_2O} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r}{r} = \frac{5r + O_2O}{O_2O} \quad \Rightarrow \quad O_2O = 5r.$$

Границы полутени определяются точками пересечения внутренних касательных и экрана. Найдём положение точки F — точки пересечения внутренних касательных между собой. Из подобия $\triangle O_1BF$ и $\triangle O_2DF$ следует, что

$$\frac{O_1B}{O_2D} = \frac{O_1F}{O_2F} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r}{r} = \frac{5r - O_2F}{O_2F} \quad \Rightarrow \quad O_2F = \frac{5r}{3}.$$

Теперь, пользуясь подобием $\triangle O_2DF$ и $\triangle OFE$ получим радиус полутени OE:

$$\frac{OE}{O_2D} = \frac{OF}{FD} \quad \Rightarrow \quad \frac{OE}{r} = \frac{5r/3 + 5r}{\sqrt{(5r/3)^2 - r^2}} \quad \Rightarrow \quad OE = \frac{20r/3}{4r/3} \cdot r = 5r.$$

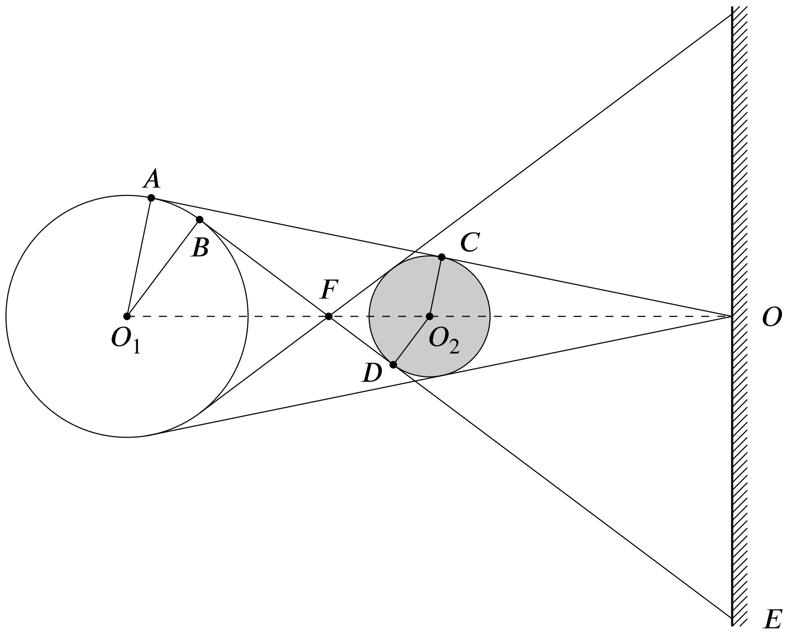


Рис. 9.5.

Критерии:

1) Указано, что экран проходит через точку пересечения внешних касательных . . . . 2 балла
2) Правильно найдено расстояние от центра мяча/источника до экрана . . . . 2 балла
3) Указано, что граница полутени задаётся точками пересечения экрана и внутренних касательных . . 2 балла
4) Правильно найдено положение точки F . . . . 2 балла
5) Получено верное значение радиуса полутени . . . . 2 балла

Указания проверяющим:

1) В пунктах 1 и 3 достаточно корректно сделанного чертежа.

2) Если вместо касательных изображены прямые, проходящие через концы диаметров, параллельных экрану, чертёж считается некорректным, и баллы за соответствующий пункт/пункты не ставятся!

3) Если в п. 1 использован некорретный чертёж (см. выше), баллы за п. 2 и 5 не ставить. Аналогично, если в п. 3 использован некорретный чертёж, баллы за п. 4 и 5 не ставить.

4) Если при **корректном** решении учащийся не нашёл положение точки F, но нашём радиус полутени, баллы за п.4 ставить автоматически.

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Трамплин.
Маленький брусок начинает соскальзывать из точки A (см. рис. 10.1) без начальной скорости. Наклонная поверхность, по которой он движется, образует угол γ с горизонтом, причём $\sin\gamma = 3/5$, а в точке B она резко обрывается вниз. Каков коэффициент трения между бруском и наклонной поверхностью, если брусок падает на поверхность земли под углом 60° к горизонту? Высота относительно земли, на которой находится точка A, в два раза больше высоты, на которой находится точка B. Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность земли считать горизонтальной.

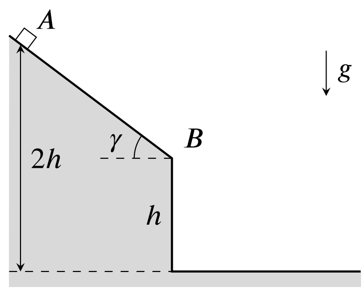


Рис. 10.1.

Ответ: $7/26 \approx 0{,}27$.

Решение: Брусок скользит по наклонной поверхности с ускорением $a = g(\sin\gamma - \mu\cos\gamma)$, где μ — коэффициент трения между бруском и поверхностью. В точке B брусок будет иметь скорость

$$v = \sqrt{2a \cdot h/\sin\gamma} = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg}\gamma)},$$

направленную под углом γ относительно горизонта. Дальнейшее движение бруска будет происходить по баллистической траектории. Так как при падении на землю вектор скорости тела образует угол 60° с горизонтом,

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{v\sin\gamma + gt}{v\cos\gamma},$$

где t — время полёта бруска, которое находится из уравнения $h = v\sin\gamma \cdot t + gt^2/2$. Решая это уравнение, получим, что

$$t = \frac{-v\sin\gamma + \sqrt{v^2\sin^2\gamma + 2gh}}{g} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{v^2\sin^2\gamma + 2gh}}{v\cos\gamma} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma + \frac{2gh}{v^2\cos^2\gamma}} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma + \frac{1}{(1 - \mu\operatorname{ctg}\gamma)\cos^2\gamma}}.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \mu\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\cos^2\gamma(\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \mu = \operatorname{tg}\gamma - \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos^2\gamma(\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\gamma)}.$$

Так как $\sin\gamma = 3/5$, $\cos\gamma = 4/5$ и $\operatorname{tg}\gamma = 3/4$. Подставляя эти значения, получим, что

$$\mu = \frac{3}{4} - \frac{3/4}{16/25 \cdot (3 - 9/16)} = \frac{7}{26} \approx 0{,}27.$$

Критерии:

1) Записана формула $a = g(\sin\gamma - \mu\cos\gamma)$ или аналог . . . . 1 балл
2) Записана формула $v = \sqrt{2gh/\sin\gamma}$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $h = v\sin\gamma \cdot t + gt^2/2$ или аналог . . . . 1 балл
4) Записана формула $\operatorname{tg} 60^\circ = (v\sin\gamma + gt)/(v\cos\gamma)$ или аналог . . . . 2 балла
5) Найдено верное выражение для t . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение μ . . . . 3 балла

Задача 10.2. В связке.

Два тела, связанные нерастяжимой нитью длины L, расположены так, как показано на рис. 10.2: первое тело лежит на горизонтальной поверхности, а второе — в начале наклонной плоскости с углом наклона, равным α ($\alpha > 45^\circ$). Второму телу в начальный момент времени придают постоянную скорость v, направленную вдоль наклонной плоскости.

1. Определите скорость u первого тела в начальный момент времени.
2. Какое расстояние должно пройти второе тело, чтобы скорость первого стала равна $2u$?

Размерами обоих тел можно пренебречь.

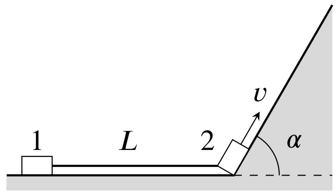


Рис. 10.2.

Ответ: $L\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение: Так как нить нерастяжима, проекции скоростей обоих тел на ось, направленную вдоль нити, должны быть равны. В начальный момент это условие примет вид $u = v\cos\alpha$.

Для ответа на второй вопрос задачи предположим, что к описанному моменту второе тело прошло расстояние s, а угол, который образует нить с горизонтом, равен β (см. рис. 10.3). Запишем снова связь между проекциями скоростей на нить:

$$2u\cos\beta = v\cos(\alpha-\beta) \quad\Rightarrow\quad 2v\cos\alpha\cos\beta = v(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha) \quad\Rightarrow\quad \cos(\beta+\alpha) = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Отсюда, используя теорему синусов, получим

$$\frac{s}{\sin\beta} = \frac{L}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad s = L\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = L\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = L\operatorname{ctg}\alpha.$$

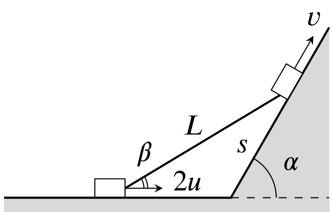


Рис. 10.3.

Критерии:

1) Использован корректный метод нахождения связи между скоростями . . . . 1 балл
2) Найдено, что $u = v\cos\alpha$ . . . . 2 балла
3) Записана формула $2u\cos\beta = v\cos(\alpha-\beta)$ или аналог . . . . 2 балла
4) Найдено, что $\beta = 90^\circ - \alpha$ . . . . 2 балла
5) Предложен корректный метод нахождения s . . . . 1 балл
6) Найдено, что $s = L\operatorname{ctg}\alpha$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:

1) Если у участника стоит балл за п. 2, то балл за пункт 1 ставится автоматически.
2) Если участник корректно нашёл, что $s = L\operatorname{ctg}\alpha$, но сделал это неавторским способом, за задачу должен стоять полный балл.

Задача 10.3. Удивительный амперметр.

Как-то раз девочка Аня собрала цепь, состоящую из двух резисторов и источника постоянного напряжения. Подключив параллельно резистору r микроамперметр (см. рис. 10.4а), Аня обнаружила, что он показывает значение $I_1 = 153$ мкА. Затем девочка подключила прибор так, как изображено на рис. 10.4б, и оказалось, что его показание увеличилось в 10 раз: $I_2 = 1530$ мкА. Наконец, Аня подключила прибор, как и положено, последовательно с резисторами (рис. 10.4в). Теперь он стал показывать $I_3 = 170$ мкА. Помогите Ане и определите сопротивление резистора r и напряжение источника, если $R = 6$ кОм.

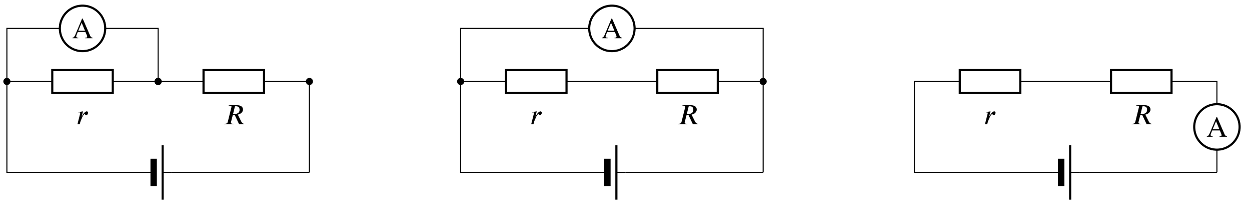


Рис. 10.4.

Ответ: 2 кОм, 1,53 В.

Решение: Пусть R_A — внутреннее сопротивление амперметра, а U_0 — напряжение источника. Из схемы (б) следует, что $U_0 = I_2 R_A$, а из схемы (в) — что $U_0 = I_3(r + R + R_A)$.

Рассмотрим теперь схему (а). Так как амперметр и резистор r соединены параллельно, сила тока через r равна $I_r = I_1 R_A / r$. Отсюда следует, что

$$U_0 = (I_r + I_1)R + I_1 R_A \quad \Rightarrow \quad U_0 = I_1 \left(\frac{R_A R}{r} + R + R_A \right).$$

Из уравнений, полученных для схем (б) и (в), получим

$$1530 \text{ мкА} \cdot R_A = 170 \text{ мкА} \cdot (r + R + R_A) \quad \Rightarrow \quad 9R_A = r + R + R_A \quad \Rightarrow \quad r + R = 8R_A.$$

Из уравнений же, полученных для (а) и (б), найдём, что

$$153 \text{ мкА} \cdot \left(\frac{R_A R}{r} + R + R_A \right) = 1530 \text{ мкА} \cdot R_A \quad \Rightarrow \quad \frac{R_A R}{r} + R + R_A = 10 R_A \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(r+R)R}{8r} + R = \frac{9(r+R)}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{8} + \frac{R^2}{8r} + R = \frac{9r}{8} + \frac{9R}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{3} = 6 \text{ кОм}.$$

Соответственно, $R_\text{A} = R/6 = 1$ кОм. Подставляя найденные сопротивления, получим, что

$$U_0 = I_2 \cdot \frac{R}{6} = 1530 \text{ мкА} \cdot 1 \text{ кОм} = 1{,}53 \text{ В}.$$

Критерии:

1) Идея о том, что амперметр имеет ненулевое сопротивление . . . . 1 балл
2) Записана формула $U_0 = I_2 R_A$ или аналог . . . . 1 балл
3) Записана формула $U_0 = I_3(r + R + R_A)$ или аналог . . . . 1 балл
4) Найдена сила тока через r на схеме (а) . . . . 1 балл
5) Записана формула $U_0 = I_1(R_A R/r + R + R_A)$ . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение r . . . . 2 балла
7) Найдено верное значение U_0 . . . . 2 балла

Задача 10.4. Растущая сила.

Вертикальная сила F, приложенная к грузу массой m (см. рис. 10.5), увеличивается со временем так, что оба груза в системе движутся равномерно. Скорость груза массой m направлена вверх и равна υ. Жёсткость обеих пружин одинакова и равна k.

1. Определите скорость u, с которой движется груз массой $m/3$.
2. Определите зависимость F от времени t. Считайте, что в момент времени $t = 0$ верхняя пружина растянута на величину x_0.

Трение в блоке отсутствует. Все нити на рисунке являются невесомыми и нерастяжимыми, а пружины и блок — невесомыми.

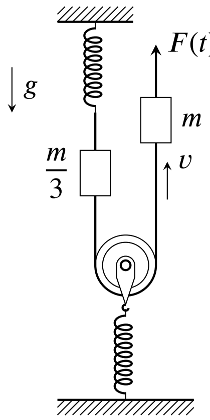


Рис. 10.5.

Ответ: 1) $u = \upsilon/5$; 2) $F = kx_0 + 2mg/3 + k\upsilon t/5$.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити, перекинутой через блок. Так как груз m движется равномерно, $F = mg + T$ в любой момент времени. Сила упругости нижней пружины, соответственно, равна $F_н = 2T$.

Второй груз также движется равномерно, следовательно сила упругости верхней пружины равна $F_в = mg/3 + T$. По условию задачи сила F увеличивается со временем, соответственно, увеличиваются и сила натяжения T, и силы упругости обеих пружин. Это значит, что обе пружины в процессе движения грузов растягиваются, а груз массой $m/3$ движется вниз.

Так как вначале верхняя пружина растянута на x_0, а дальше она изменяет свою длину с постоянной скоростью u,

$$F_в = kx_0 + kut \quad \Rightarrow \quad T = F_в - mg/3 = kx_0 + kut - mg/3.$$

Отсюда следует, что $F_н = 2T = 2kx_0 - 2mg/3 + 2kut$, то есть нижняя пружина растягивается со скоростью $2u$. С той же скоростью движется вверх и блок.

Перейдём в систему отсчёта блока. В ней груз $m/3$ движется вниз со скоростью $3u$, а груз m — вверх со скоростью $\upsilon - 2u$. Так как в данной системе отсчёта блок неподвижен,

$$3u = \upsilon - 2u \quad \Rightarrow \quad u = \upsilon/5.$$

Найдём теперь выражение для силы F:

$$F = mg + T = kx_0 + 2mg/3 + kut = kx_0 + 2mg/3 + k\upsilon t/5.$$

Критерии:

1) Записана формула $F = mg + T$ . . . . 0,5 балла
2) Записана формула $F_н = 2T$ . . . . 0,5 балла
3) Записана формула $F_в = mg/3 + T$ . . . . 0,5 балла
4) Обосновано, что скорость блока равна $2u$ . . . . 2,5 балла
5) Найдено, что $u = \upsilon/5$ . . . . 3 балла
6) Получено, что $F = kx_0 + 2mg/3 + kut$ . . . . 2 балла
7) Получено, что $F = kx_0 + 2mg/3 + k\upsilon t/5$ . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Простого указания на подвижность блока **недостаточно** для обоснования в п.4. В случае отсутствия корректного обоснования, баллы за пп.5-7 не ставить.
2) Если корректно получена формула для F в пункте 7, баллы за п.6 ставить автоматически.

Задача 10.5. Две линзы.
Экспериментатор Иннокентий Иванов, разбирая свой архив, обнаружил рисунок оптической системы, состоящей из двух линз, собирающей и рассеивающей, имеющих общую главную оптическую ось OO' (см. рис. 10.6). Согласно сохранившимся записям, точка S' является действительным изображением точки S в данной оптической системе. Построением, выполненным с помощью циркуля и линейки без делений, определите положение фокусов обеих линз. Все сделанные построения сопроводите необходимыми объяснениями.

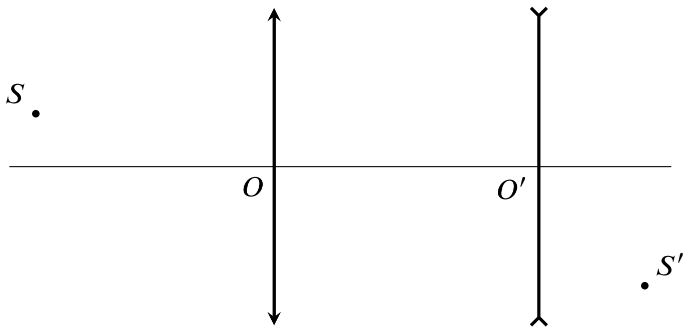


Рис. 10.6.

Ответ: См. рис. 10.7.

Решение: Пусть S'' — изображение точки S в собирающей линзе. Тогда изображение точки S'' в рассеивающей линзе — точка S'. Так как источник и соответствующее ему изображение лежат на прямой, проходящей через оптический центр линзы, сделаем необходимое построение: проведём прямые SO и $S'O'$. Точка пересечения этих прямых — точка S''.

Для нахождения фокусов собирающей линзы построим луч, идущий из точки S параллельно главной оптической оси. После преломления в линзе он пойдёт в точку S''. Получившаяся при этом точка пересечения луча после линзы и главной оптической оси — фокус собирающей линзы. Второй фокус откладываем симметрично.

Чтобы найти фокусы рассеивающей линзы, действуем аналогично, только с главной оптической осью будет пересекаться продолжение преломлённого луча. В результате получим точку F'. Второй фокус откладываем симметрично с другой стороны рассеивающей линзы.

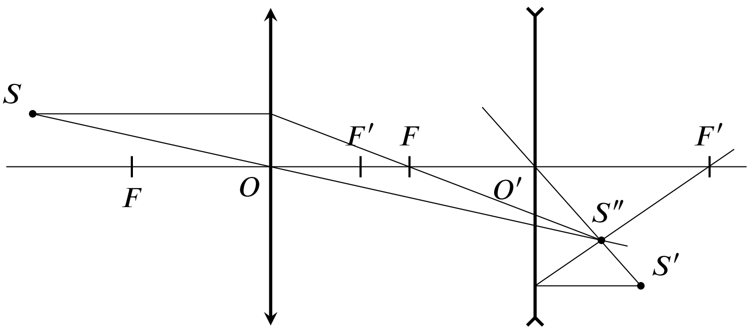


Рис. 10.7.

Критерии:

1) Описана методика нахождения точки S'' . . . . 2 балла
2) Обоснование методики нахождения S'' . . . . 2 балла
3) Сделано соответствующее построение для точки S'' . . . . 1 балл
4) Описана методика нахождения фокусов собирающей линзы . . . . 1,5 балла
5) Описана методика нахождения фокусов рассеивающей линзы . . . . 1,5 балла
6) Сделано построение фокусов собирающей линзы . . . . 1 балл
7) Сделано построение фокусов собирающей линзы . . . . 1 балл

Указание проверяющим:

1) Если у участника есть только чертёж без описания, оцениваются только пп.3,6,7.

2) Если построен только один фокус линзы (из двух), за соответствующий пункт ставить 0,5 балла.

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Любишь кататься, люби и саночки возить!

Маленький мальчик Паша очень любил кататься на санках со снежной горки, но совсем не любил подниматься в эту горку пешком. Поэтому заботливый папа затаскивал наверх санки вместе с сидящим на них мальчиком с помощью верёвки, прикладывая к ней силу $F = 130$ Н. Определите коэффициент трения полозьев санок о снег и ускорение, с которым Паша съезжает с горки. Масса мальчика вместе с санками равна 20 кг. Склон горки имеет угол 30° с горизонтом. Во время подъёма санки движутся равномерно, а верёвка параллельна поверхности горки. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\mu = 0{,}17$, $a = 3{,}5$ м/с^2.

Решение: Пусть m — масса мальчика с санками, μ — коэффициент трения полозьев о снег. В случае, когда санки тянут вверх

$$F = mg\sin 30^\circ + \mu mg\cos 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{F - mg\sin 30^\circ}{mg\cos 30^\circ} = \frac{130\text{ Н} - 200\ H\cdot 0{,}5}{200\text{ Н}\cdot\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{10} \approx 0{,}17.$$

Во втором случае ускорение санок равно

$$a = g(\sin 30^\circ - \mu\cos 30^\circ) = g\left(0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}35g = 3{,}5\text{ м/с}^2.$$

Критерии:

1) Формула $F = mg\sin 30^\circ + \mu mg\cos 30^\circ$ . . . . 3 балла
2) Найдено верное значение коэффициента трения . . . . 2 балла
3) Формула $a = g(\sin 30^\circ - \mu\cos 30^\circ)$ . . . . 3 балла
4) Найдено верное значение ускорения санок . . . . 2 балла

Задача 11.2. Кидаем в гору.

На расстоянии L от подножия горы, поверхность которой образует угол α с горизонтом, находится место, откуда брошено тело. Угол между направлением броска и горизонтом также равен α (см. рис. 11.1). Определите время, за которое брошенное таким образом тело долетит до склона горы, если бросок достаточно силён, чтобы это было возможно. Сопротивлением воздуха пренебречь. Высоту склона считать достаточно большой.

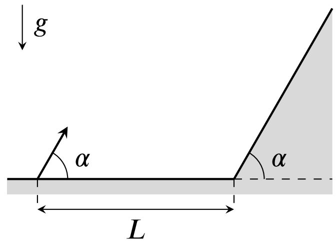


Рис. 11.1.

Ответ: $\sqrt{2L\operatorname{tg}\alpha/g}$.

Решение: Пусть s — расстояние от подножия горы до точки попадания тела в её склон, v_0 — начальная скорость тела, а t — время полёта камня.

Способ 1. Возьмём начало координат в точке броска и направим ось Ox горизонтально, а ось Oy вертикально. Тогда

$$v_0 t\cos\alpha = L + s\cos\alpha, \qquad v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = s\sin\alpha.$$

Выражая из первого уравнения v_0 и подставляя во второе, получим:

$$\frac{L + s\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = s\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \frac{L\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

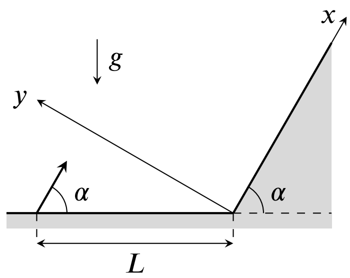


Рис. 11.2.

Способ 2. Возьмём начало координат в нижней точке горы и направим ось Ox вдоль склона, а ось Oy перпендикулярно склону (рис. 11.2). Тогда в проекции на ось Oy

$$L\sin\alpha - \frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2} = 0.$$

Отсюда найдём, что $t = \sqrt{2L\operatorname{tg}\alpha/g}$.

Критерии:

Способ 1.

1) Записана верная формула зависимости координаты x от времени . . . . 0,5 балла
2) Записана верная формула зависимости координаты y от времени . . . . 0,5 балла
3) Записаны координаты точки падения тела на склон в выбранной СК . . . . 2 балла
4) Записано уравнение $v_0 t\cos\alpha = L + s\cos\alpha$ или его аналог в выбранной СК . . . . 2 балла
5) Записано уравнение $v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = s\sin\alpha$ или его аналог в выбранной СК . . . . 2 балла
6) Найдено, что $t = \sqrt{2L\operatorname{tg}\alpha/g}$ . . . . 3 балла

Способ 2.

7) Найдена проекция $\vec{g}$ на ось Oy . . . . 2 балла
8) Записаны координаты y точки броска и точки попадания в склон . . . . 2 балла
9) Записано уравнение $L\sin\alpha - g\cos\alpha\cdot t^2/2 = 0$ . . . . 3 балла
10) Найдено, что $t = \sqrt{2L\operatorname{tg}\alpha/g}$ . . . . 3 балла

Указание проверяющим:

1) При оценке работы необходимо пользоваться **только одной** группой критериев: пп. 1-6 (Способ 1), либо пп. 7-10 (Способ 2).

2) Если баллы за пп. 4,5 выставлены, баллы за пп 1-3 должны ставиться автоматически.

Задача 11.3. Призма в углу.
В углу, образованном горизонтальным полом и вертикальной стенкой, стоит однородная прямая треугольная призма, одна из боковых граней которой перпендикулярная полу (см. рис. 11.3). Основания призмы параллельны плоскости рисунка и являются равносторонними треугольниками. Коэффициент трения между призмой и любой из поверхностей равен μ. При каком минимальном значении μ призма будет находиться в покое?

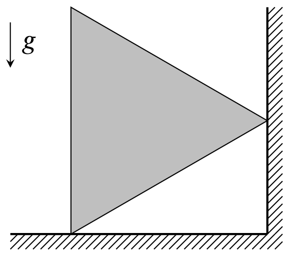


Рис. 11.3.

Ответ: $\mu \approx 0{,}4$.

Решение: Пусть m — масса призмы, а L — расстояние между стеной и противоположной боковой гранью. Изобразим силы, действующие на призму (рис. 11.4): силу тяжести mg, приложенную к центру тяжести призмы; силы реакции N_1 и N_2, действующие со стороны пола и стенки; силы трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Центр тяжести призмы расположен на расстоянии $2L/3$ от стены.

Рассмотрим предельный случай, когда призма начинает соскальзывать, а $F_{тр1} = \mu N_1$, $F_{тр2} = \mu N_2$. Запишем условие равенства равнодействующей всех сил нулю в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

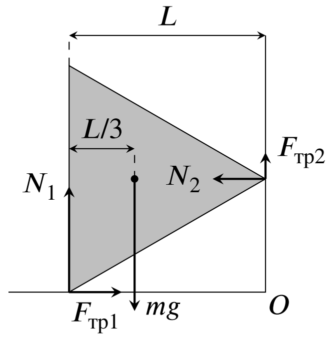


Рис. 11.4.

$$\mu N_1 - N_2 = 0, \qquad N_1 + \mu N_2 - mg = 0,$$

откуда получим, что

$$N_1 = \frac{mg}{1+\mu^2}, \qquad N_2 = \mu N_1 = \frac{\mu mg}{1+\mu^2}.$$

Запишем теперь правило моментов относительно угла между стеной и полом (точки O):

$$N_1 L = mg \cdot \frac{2L}{3} + N_2 \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{mgL}{1+\mu^2} = \frac{2mgL}{3} + \frac{\mu mgL}{\sqrt{3}(1+\mu^2)} \quad \Rightarrow \quad 3 = 2(1+\mu^2) + \sqrt{3}\mu \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\mu^2 + \sqrt{3}\mu - 1 = 0.$$

Решая полученное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, определим коэффициент трения

$$\mu = (\sqrt{11} - \sqrt{3})/4 \approx 0{,}4.$$

Критерии:

1) Верно изображены силы, действующие на призму . . . . 1 балл
2) Указано, что центр тяжести призмы находится на расстоянии $2L/3$ (или аналог в других обозначениях) 1 балл
3) Правильно записано условие равенства суммы сил нулю в проекции на одну из осей . . . . 1 балл
4) Правильно записано условие равенства суммы сил нулю в проекции на другую ось . . . . 1 балл
5) Найдено выражение для N_1 или N_2 через μ и mg . . . . 1 балл
6) Правильно записано правило моментов . . . . 2 балла
7) Получено уравнение $2\mu^2 + \sqrt{3}\mu - 1 = 0$ или его аналог . . . . 2 балла
8) Найдено значение μ . . . . 1 балл

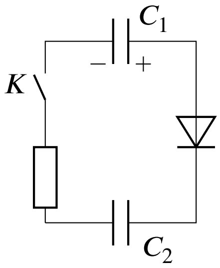
Указание проверяющим:
1) Пункт 1 оценивается независимо от остальных.
2) В п. 2 достаточно указания, что центр тяжести находится в точке пересечения медиан, которая делит каждую в отношении 1:2.
3) В пункте 5 правило моментов может быть записано относительно любой точки. Если оно записано верно, баллы ставятся.
4) Вместо одного из условий равенства нулю суммы сил (или даже обоих) может быть записано правило моментов относительно ещё какой-либо дополнительной точки (точек). В этом случае первое верно написаное правило моментов оценивается в 2 балла (п.6 критериев), а следующее — в 1 балл (п.4 критериев).
5) Если в п.7 записано верное уравнение, полученное корректным способом, баллы за пп.2-6 ставятся автоматически.

Задача 11.4. Перезарядка с диодом.

Цепь, изображённая на рис. 11.5а, состоит из двух конденсаторов, диода, резистора и ключа. Сначала ключ разомкнут, конденсатор ёмкостью $C_1 = 10$ мкФ заряжен зарядом $q = 34$ мкКл (полярность указана на рис. 11.5а), а на втором конденсаторе заряда нет.

1. Определите заряд, который установится на конденсаторе ёмкостью $C_2 = 5$ мкФ, если ключ замкнуть.
2. Найдите количество теплоты, которое выделится **на резисторе** в процессе перезарядки.

Вольт-амперная характеристика диода изображена на рис. 11.5б. При напряжении $U_0 = 1$ В диод открывается и начинает пропускать ток.



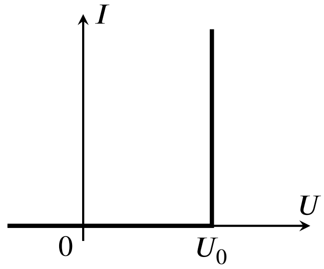


Рис. 11.5.

Ответ: 1) 8 мкКл; 2) 9,6 мкДж.

Решение: До замыкания ключа напряжение на конденсаторе C_1 равно $U_1 = q/C_1 = 3{,}4$ В. Так как $U_1 > U_0$, при замыкании ключа конденсатор C_1 начнёт разряжаться через диод и станет заряжать второй конденсатор. Конденсатор C_2 будет заряжаться до тех пор, пока разность напряжений между конденсаторами не упадёт до U_0 и диод не закроется. Пусть q_2 — конечный заряд второго конденсатора, тогда

$$\frac{q - q_2}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = U_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{34\ \text{мкКл} - q_2}{10\ \text{мкФ}} - \frac{q_2}{5\ \text{мкФ}} = 1\ \text{В} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 8\ \text{мкКл}.$$

Количество теплоты, выделяющееся на диоде, можно найти как

$$Q_D = q_2 U_0 = 8\ \text{мкДж}.$$

Количество теплоты, выделяющееся на резисторе, равно

$$Q_R = -\Delta W - Q_D,$$

где ΔW — изменение энергии конденсаторов. Вычислим его:

$$\Delta W = \frac{(q - q_2)^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1} = \frac{(26\ \text{мкКл})^2}{2 \cdot 10\ \text{мкКл}} + \frac{(8\ \text{мкКл})^2}{2 \cdot 5\ \text{мкКл}} - \frac{(34\ \text{мкКл})^2}{2 \cdot 10\ \text{мкКл}} = -17{,}6\ \text{мкДж}.$$

Отсюда получим, что

$$Q_R = -\Delta W - Q_D = 9{,}6\ \text{мкДж}.$$

Критерии:

1) Записано условие $(q - q_2)/C_1 - q_2/C_2 = U_0$ или аналог . . . . 2 балла
2) Найдено верное значение q_2 . . . . 1 балл
3) Записана верная формула для Q_D . . . . 1 балл
4) Записана формула $Q_D + Q_R = -\Delta W$ или аналог . . . . 2 балла
5) Записано выражение для ΔW через заряды и ёмкости . . . . 2 балла
6) Найдено верное значение Q_R . . . . 2 балла

Задача 11.5. Перераспределение тепла.
Вертикальный цилиндрический теплоизолированный сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом, разделён подвижным горизонтальным поршнем на две равные по объёму части. Количество вещества в верхней и нижней частях сосуда одинаково, температура в верхней части равна T_0, а в нижней — $3T_0$. Из-за слабой теплопроводности поршня температура в сосуде медленно начинает выравниваться. Определите температуры газа в верхней и нижней частях сосуда, когда поршень делит его объём в отношении $2 : 3$.

Ответ: $T_в = 8T_0/5$, $T_н = 8T_0/3$.

Решение: Давление в нижнем отсеке всегда больше, чем в верхнем на некоторую постоянную величину, определяемую массой поршня. Обозначим её как $p_п$. Рассмотрим начальное состояние системы. Пусть давление в верхней половине равно p_0, объём половины сосуда — V_0. Тогда, во-первых, $p_0V_0 = \nu RT_0$, где ν — количество газа в одном отсеке, и, во-вторых, давление в нижней равно $p_0 + p_п$. Так как объёмы отсеков равны, а температуры газа отличаются втрое,

$$p_0 + p_п = 3p_0 \quad \Rightarrow \quad p_п = 2p_0.$$

Пусть поршень теперь делит объём сосуда в отношении 2:3. Это значит, что $V_н = 4V_0/5$, $V_в = 6V_0/5$ (при охлаждении нижнего отсека его объём будет меньше, чем у верхнего). Поскольку извне в сосуд тепло не подводится,

$$0 = \frac{3}{2}\nu R(\Delta T_н + \Delta T_в) + p_п \Delta V_н \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{3}{2}\nu R(T_н + T_в - 4T_0) - \frac{2p_0V_0}{5}.$$

Здесь индекс «н» здесь и далее относится к параметрам для нижнего отсека, а индекс «в» — к параметрам верхнего. Подставляя сюда равенство $p_0V_0 = \nu RT_0$, получим, что

$$0 = \frac{3}{2}(T_н + T_в - 4T_0) - \frac{2T_0}{5} \quad \Rightarrow \quad T_н + T_в = \frac{64T_0}{15}.$$

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для нижнего и верхнего отсеков:

$$\text{(нижний отсек)} \qquad p_н \cdot \frac{4V_0}{5} = \nu RT_н \quad \Rightarrow \quad p_н = \frac{5\nu RT_н}{4V_0},$$

$$\text{(верхний отсек)} \qquad p_в \cdot \frac{6V_0}{5} = \nu RT_в \quad \Rightarrow \quad p_в = \frac{5\nu RT_в}{6V_0}.$$

Так как $p_н - p_в = p_п = 2p_0$,

$$2p_0 = \frac{5\nu RT_н}{4V_0} - \frac{5\nu RT_в}{6V_0} \quad \Rightarrow \quad 2\nu RT_0 = \frac{5\nu RT_н}{4} - \frac{5\nu RT_в}{6} \quad \Rightarrow \quad 2T_0 = \frac{5T_н}{4} - \frac{5T_в}{6}.$$

Решая полученную систему, найдём значения $T_н$ и $T_в$:

$$T_в = 8T_0/5, \quad T_н = 8T_0/3.$$

Критерии:

1) Указано, что поршень массивный и/или оказывает какое-то дополнительное давление . . . . 0,5 балла
2) Найдены объёмы отсеков, когда поршень делит сосуд как 2:3 . . . . 0,5 балла
3) Формула $0 = \frac{3}{2}\nu R(\Delta T_н + \Delta T_в) + p_п\Delta V_н$ или аналог . . . . 3 балла
4) Уравнение Менделеева-Клапейрона для нижнего отсека . . . . 1 балл
5) Уравнение Менделеева-Клапейрона для верхнего отсека . . . . 1 балл
6) Полученная правильная система уравнений для определения $T_н$ и $T_в$ . . . . 2 балла
7) Найдены верные выражения для $T_н$ и $T_в$ . . . . 2 балла

Указание проверяющим:
Если в п. 7 получено только одно верное выражение из двух, ставить 1 балл.

Максимально возможный балл в 11 классе 50