Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 4 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача	Ответ	Баллы
1.	12:29	
2.	35	
3.	1725	
4.	10	
5.	Проверять пример! Например, так: $1 + 6 + (1 \times 1) + 20 + 20$.	
6.	25	
7.	3	
8.	28	
9.	25	
10.	Красные	
11.	10	
12.	19	
13.	23	
14.	9	
15.	192	
16.	9800	
17.	30	
18.	29	
19.	18 или 20. *Один верный ответ — 2 балла. Два верных при наличии одного неверного — 2 балла. Хотя бы два неверных ответа или один верный и один неверный ответы — 0 баллов.*	
20.	9	

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 5 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача	Ответ	Баллы
1.	Проверять пример! Например, так: $1 + 6 + 1 + (1 + 2 + 0) \times 20$.	
2.	2	
3.	а) 3 подруги, б) 113 рублей. *Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.*	
4.	180	
5.	3925	
6.	11	
7.	17	
8.	0.5 = ½	
9.	91	
10.	Рома	
11.	29	
12.	15317	
13.	3	
14.	10	
15.	28	
16.	Айдар	
17.	11 111 111 082	
18.	2, 4. *Указан только один верный ответ — 2 балла. 5 баллов ставить, только если указаны оба ответа.*	
19.	25	
20.	144	

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год.   6 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача	Ответ	Баллы
1.	Пример проверять! В любом верном примере сумма первых трех чисел равна 9, а сумма последних трех — 18, например, 2, 3, 4, 1, 8, 5, 6, 7. *Любой верный пример — 5 баллов.*	
2.	4000	
3.	9	
4.	30	
5.	А	
6.	40%. *Просто ответ «40» тоже принимать*	
7.	а) 10; б) 1. Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.	
8.	1/2 или 0,5. *Любой из этих ответов — 5 баллов. Несокращенный ответ* $\frac{3}{6}$ *— 3 балла.*	
9.	Проверять пример! Например, так: $1 + 6 + (1 \times 1 + 2 + 0) \times 20$.	
10.	Есть много ответов. Среди них 326, 613, 819. *Любой верный ответ — 5 баллов*	
11.	30	
12.	376.	
13.	570	
14.	7	
15.	171	
16.	Первый, второй и четвертый. *Неполный ответ не оценивается*	
17.	а) 20; б) 21. *Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.*	
18.	11	
19.	11	
20.	150 минут или 2,5 часа. *Принимать любую форму записи верного ответа.*	

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 7 класс.

Ответы.

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача	Ответ	Баллы
1.	Пример проверять! В любом верном примере в середине стоит 5. Например, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7. *Любой верный пример — 5 баллов.*	
2.	4500	
3.	9	
4.	33	
5.	18	
6.	а) 11; б) 2. *Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.*	
7.	Проверять пример! Например, так: $1 + 6 \times (1 + 1) + 20 + 20$.	
8.	23	
9.	19	
10.	30	

Задача	Ответ	Баллы
11.	40	
12.	Есть много ответов. Среди них 1326, 3126, 1613, 2313, 3213, 6113, 1819, 2419, 4219, 8119. *Любой верный ответ — 5 баллов.*	
13.	412	
14.	9	
15.	2450	
16.	6750	
17.	а) 25; б) 46. Верный ответ: а) 2 балла, б) 3 балла.	
18.	Второй и пятый	
19.	252	
20.	31	

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 8-11 классов
2020–2021 учебного года

Задания содержат по 5 задач для каждого класса. В каждом задании необходимо записать не только ответ, но и полное решение. Только ответы без обоснования оцениваются намного ниже. Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 35. Олимпиада длится **240 минут**.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Время начала олимпиады в разных кабинетах может отличаться. Важно, чтобы школьникам на написание работы было выделено ровно столько минут, сколько положено для их класса (с момента получения заданий). Рекомендуем написать на доске время начала олимпиады и время окончания. Например, начало – 9:36, окончание – 13:36. Досрочная сдача работы разрешается.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков. Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий (8-11 класс)

Во время проверки работ муниципального этапа районные комиссии могут задавать вопросы по критериям оценивания и спорным случаям членам республиканской предметно-методической комиссии по математике. Вопросы можно задавать по электронной почте: kazan-mat@mail.ru

Баллы (общие критерии)	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют или решение отсутствует.

В решениях, подготовленных республиканской предметно-методической комиссией, указаны конкретные критерии оценивания некоторых задач.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

д) Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

е) Обязательным является проведение двух независимых проверок каждого решения.

8 класс

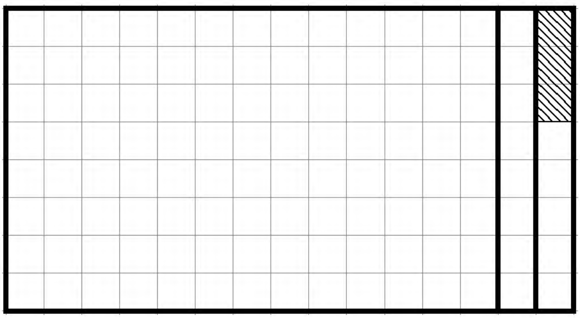
Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Можно ли, используя знаки «+», «−», «·» и несколько выражений a^4 и a^6-1, получить a^6?

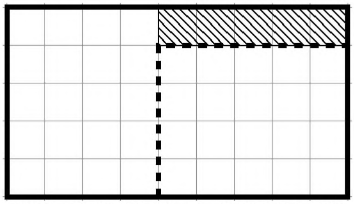
Решение. Да, $-(a^6-1)\cdot(a^6-1)-(a^6-1)+a^4\cdot a^4\cdot a^4=a^6$.

2. Можно ли вырезать из прямоугольника 15×8 три клеточки и провести в полученной фигуре два прямолинейных разреза так, чтобы из полученных частей можно было сложить прямоугольник?



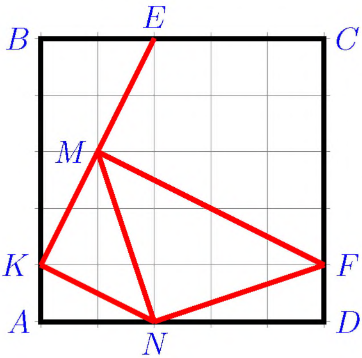
Решение. Да, можно.

3. Клетчатый прямоугольник 5×9 Петя разрезает на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



Решение. Выиграет Петя. Петя сделает первый разрез так, как показано на рисунке. Дальше фигура распадается на две части, причем одна из них имеет несущественный для игры заштрихованный прирост. Дальше Петя применяет симметричную стратегию: на всякий ход второго в одном из прямоугольников отвечает таким же ходом в другом.

4. Дан квадрат $ABCD$. Точка N лежит на стороне AD, причём $AN : ND = 2 : 3$, точка F лежит на стороне CD и $DF : FC = 1 : 4$, точка K лежит на стороне AB, причём $AK : KB = 1 : 4$. Найдите угол KNF.



Решение. Отметим точку E на стороне BC так, что $BE : EC = 2 : 3$. Пусть M — середина KE. Тогда $\triangle KMN$ — равнобедренный прямоугольный и $\triangle MNF$ — равнобедренный треугольник. Следовательно, $\angle KNF = \angle KNM + \angle MNF = 45° + 90° = 135°$.

5. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски расставить шашки так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) стояло нечетное количество шашек?

Решение. Расставим шашки на все поля. Рассмотрим диагонали шахматной доски. Закрашенные и не закрашенные диагонали общих клеток не имеют, поэтому достаточно рассмотреть только диагонали одного цвета. Пусть это будут закрашенные диагонали. Имеем нечетное количество диагоналей с четным числом закрашенных клеток и четное количество диагоналей с нечетным числом закрашенных клеток.

Предположим, что шашки таким образом расставить можно. Тогда из всех диагоналей с четным количеством нужно убрать хотя бы по одной шашке. У нас имеется 7 диагоналей с четным количеством клеток. Это значит, что нужно убрать хотя бы 7 шашек.

Чтобы на диагоналях с нечетным количеством четность сохранилась, нужно убирать четное количество шашек с каждой такой диагонали. Значит, убранных шашек должно быть хотя бы 8. Если мы уберем 8 шашек, то из 7 диагоналей с четным количеством клеток, найдется та, где нужно будет взять хотя бы 2 шашки, что не изменит четность этой диагонали.

Рассуждая дальше аналогично, приходим к тому, что это сделать невозможно.

9 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

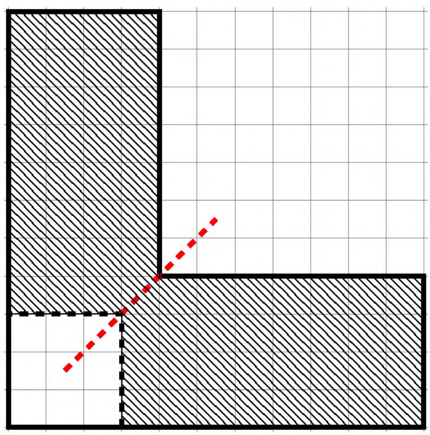
баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. У Васи есть калькулятор, который для любых чисел a и b вычисляет числа $a+b$, $a-b$, $\dfrac{1}{a+1}$, $a \neq -1$. Может ли Вася, сделав не больше 6 операций, получить квадрат любого положительного числа?

Решение. Перечислим операции:

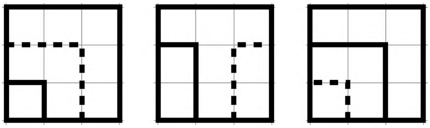
$$a-1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2+a},\ \frac{1}{a^2+a}-1,\ \frac{1}{\frac{1}{a^2+a}-1+1},\ (a^2+a)-a.$$

2. Из клетчатого листочка вырезали фигурку, изображенную жирной линией на рисунке. Петя разрезает эту фигуру на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



Решение. Победит начинающий, его первый ход показан на рисунке (жирная пунктирная линия). Красная пунктирная прямая делит закрашенную фигуру на две одинаковые части. Разрез по правилам игры не может затронуть сразу обе части, в любой части можно делать разрезы независимо от того, что происходит в другой.

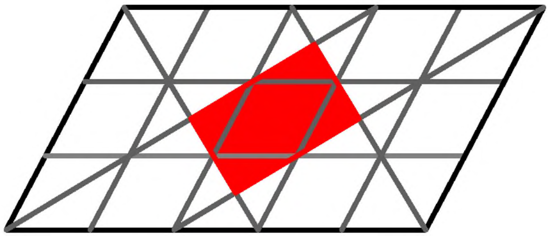
На любой ход Васи в закрашенной фигуре Петя отвечает симметричным разрезом относительно красной линии.



(a) (b) (c)

Когда Вася решит разрезать квадрат 3×3, у него найдется три варианта это сделать (см. рисунок). И на каждый такой вариант у Пети найдется ход - ответ. Значит, у Васи ходы закончатся раньше.

3. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.



Решение. Биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник. Разделим параллелограмм на ромбы со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам параллелограмма. Ясно, что площадь красного прямоугольника составляет две площади ромба со стороной 1. А всего ромбов в этом параллелограмме — 15. Откуда следует, что отношение площадей равно $\dfrac{2}{15}$.

4. Найдите наибольшее чётное трехзначное число x, дающее при делении на 5 остаток 2 и удовлетворяющее условию $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 3$.

Решение. Из условия получаем, что найдутся такие $a, b \in \mathbb{N}$, что $3a = 30$, $\text{НОД}(x, 15) = 3b$, причем $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Рассмотрим равенство $\text{НОД}(x, 15) = 3b$. Это значит, что $\exists c, d \in \mathbb{N}$ такие, что $x = 3bc$ и $15 = 3bd$, причем $\text{НОД}(c, d) = 1$.

Из равенства $15 = 3bd$ следует, что $bd = 5$, т.е. $\left[\begin{array}{l} b = 1,\ d = 5 \\ b = 5,\ d = 1 \end{array}\right.$.

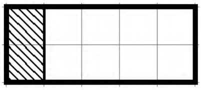
Пусть $b = 1,\ d = 5$. Тогда $x = 3c$. Учитывая, что x — чётное, получим $x = 6m$. Из условия $\text{НОД}(c, d) = 1$ следует, что c не делится на 5, а это значит, что $6m$ не делится на 5, т.е. x может быть равен любому из следующих чисел: $30l + 6,\ 30l + 12,\ 30l + 18,\ 30l + 24$, где l — любое натуральное число. Учитывая, что x при делении на 5 дает остаток 2, нам подходит только $30l + 12$.

Пусть $b = 5$, $d = 1$. Тогда $x = 15c$, т.е. $x = 30t$, но тогда $\text{НОД}(x, 15) = 15$ и $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 15$ — противоречие.

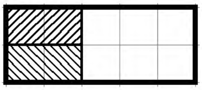
Следовательно задача свелась к поиску наибольшего трёхзначного числа вида $30l + 12$. Это 972.

5. Сколькими способами можно покрыть прямоугольную доску размером 2×13 прямоугольными плитками размером 1×2? (Плитки укладываются так, чтобы они не пересекались и чтобы целиком помещались на доске.)

Решение. Обозначим через x_n число способов покрытия доски размером $2 \times n$ плитками размера 1×2. Левый конец такой доски будет покрыт одним из двух способов.



(d)



(e)

В первом случае имеется x_{n-1} способов покрыть доску $2 \times n$, а во втором случае — x_{n-2} способов. Поэтому всего имеется $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ способов покрыть доску $2 \times n$. Очевидно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тогда $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, ..., $x_{13} = x_{12} + x_{11} = 144 + 233 = 377$.

10 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?

Решение. Да, можно. Приведем этапы построения:

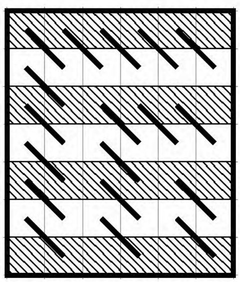
1) Построим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Тогда гипотенуза у этого треугольника равна $2+\sqrt{10}$.

2) Используя отрезок длиной 1 и отрезок, полученный в **1)**, получим отрезок длиной $\sqrt{10}$.

3) Построим прямоугольный треугольник с катетом 2 и гипотенузой $\sqrt{10}$. Тогда второй катет равен $\sqrt{6}$.

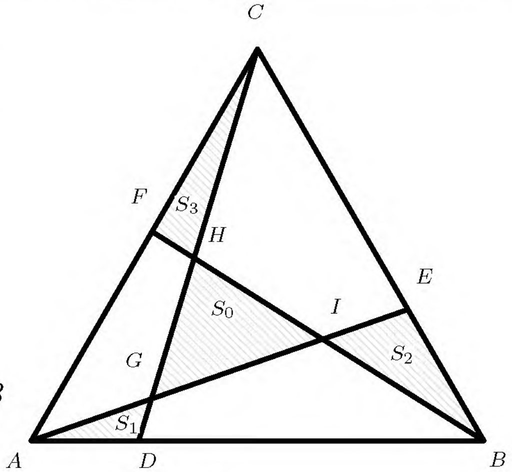
2. Дана клетчатая доска 7×6. Нёд — фигура из двух клеток, имеющих одну общую вершину (на рисунке два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из этой доски?

Решение.



Покрасим доску 7×6 так, как показано на рисунке. Тогда каждый нёд будет занимать одну закрашенную и одну незакрашенную клетку. Значит, количество нёдов, которые можно уместить на эту доску — не больше 18. Пример показан на том же рисунке.

3. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE, BF, CD так, как показано на рисунке. Площади заштрихованных треугольников равны S_0, S_1, S_2, S_3, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.



Решение. Обозначим площади четырехугольников $CHIE$, $DGIB$ и $GHFA$ как a, c и b соответственно. Тогда

$$\frac{S_{ABE}}{S} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{S_1 + c + S_2}{S} = \frac{BE}{BC};$$

$$\frac{S_{FCB}}{S} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow \frac{a + S_2 + S_3}{S} = \frac{CF}{BC};$$

$$\frac{S_{ACD}}{S} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{S_3 + b + S_1}{S} = \frac{AD}{BC}.$$

Поэтому

$$\frac{2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + a + b + c}{S} = \frac{BE + CF + AD}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{BE + CF + AD}{BC}.$$

4. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

Решение. Подставим в формулу $f(x+1) - f(x) = x + 1$ вместо x числа $0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 60,\ 61$. Получим $f(1) - f(0) = 0 + 1$, $f(2) - f(1) = 1 + 1$, $f(3) - f(2) = 2 + 1$, ..., $f(62) - f(61) = 62 + 1$.

Сложим почленно полученные равенства, получим

$$f(62) - f(0) = 1 + 2 + 3 + ... + 63 = 32 \cdot 63 = 2016.$$

Значит, $f(62) = 2020$.

5. Прибор должен из многочлена $2020x^4 + x + 1$, меняя его коэффициенты, получить за несколько шагов многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями. Сумеет ли этот прибор выполнить преобразования, если он умеет делать за один шаг только одну из двух операций: **1)** изменять (увеличить или уменьшить) на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; **2)** изменять одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена?

Решение. Пусть $P(x) = 2020x^4 + x + 1$ и $Q(x) = x^4 + 2020x + 1$. Имеем, $P(-1) = 2020 > 0$ и $Q(-1) = -2020 < 0$. Применяя операцию **1)**, прибор изменяет значение трехчлена в точке -1 на ± 1, поэтому один из промежуточных трехчленов будетиметь корень -1. Применяя операцию **2)**, прибор или не меняет значение в точке -1, или изменяет его на ± 2, поэтому один из трехчленов будет иметь корень -1, так как $P(-1)$ и $Q(-1)$ — четные числа. Значит, такое невозможно.

<u>Дополнительная корректировка решений:</u>

Задача 10.4

$$f(62) - f(61) = 61 + 1 = 62 \rightarrow f(62) - f(0) = 31 * 63 = 1953$$

Значит, $f(62) = 1957$.

Задание 10.5 исправленное решение

Да, можно. $2020x^4 + x + 1 \rightarrow 2020x^4 + 1 \rightarrow 2x^4 + 1 \rightarrow x^4 + x + 1 \rightarrow 2x + 1 \rightarrow 2020x + 1 \rightarrow x^4 + 2020x + 1$

Заметим, что $x^4 + x + 1$ не имеет целых корней, т.к. Целые корни находятся среди делителей свободного члена.

11 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Разобьём ряд натуральных чисел на группы:

$$(1),\ (2,3),\ (4,5,6)\ (7,8,9,10),\ \ldots$$

Обозначим S_n сумму n-ой группы чисел. Найдите $S_{16}-S_4-S_1$.

Решение. Заметим, что в n-ой группе n членов и первый равен $\frac{n(n-1)}{2}+1$. Последний член n-ой группы $\frac{n(n-1)}{2}+1+(n-1)=\frac{n^2+n}{2}$. Значит, $S_n=\left(\frac{n(n-1)}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\right)\cdot\frac{n}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}$. Следовательно, $S_{16}-S_4-S_1=2056-34-1=2021$.

2. Докажите, что если при любом значении x и постоянном c имеет место равенство $f(x+c)=\dfrac{2}{1+f(x)}-1$, то $f(x)$ — периодическая функция.

Решение. Из равенства $f(x+c)=\dfrac{2}{1+f(x)}-1$ легко получается равенство $f(x+c)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$. Значит, $f(x+2c)=\dfrac{1-f(x+c)}{1+f(x+c)}=$

$$\frac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=\frac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)+1-f(x)}=f(x).$$

3. Хорда AB окружности радиуса R продолжена на отрезок $BC = AB$, точка C соединена отрезком с центром окружности O, причем CO пересекает окружность в точке D. Доказать, что $CD = 4R\sin 18°$, если известно, что на AB можно построить квадрат, вписанный в данную окружность.

Решение. Пусть продолжение CO пересекает окружность в точке E. Тогда по теореме о двух секущих $CA \cdot CB = CE \cdot CD$. Так как $AB = BC = R\sqrt{2}$, а $CE = 2R + CD$, то

$$2R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = (2R + CD) \cdot CD,$$

$$CD^2 + 2R \cdot CD - 4R^2 = 0.$$

Значит, $CD = R(\sqrt{5} - 1)$.

Так как $\sin 72° = \cos 18°$ и $\sin 72° = 4\sin 18° \cos 18°(1 - 2\sin^2 18°)$, то $8\sin^3 18° - 4\sin 18° - 1 = 0$. Получаем уравнение $8x^3 - 4x + 1 = 0$, где $x = \sin 18°$. Подбором получаем $x = 1/2$. Т.е. $8x^3 - 4x + 1 = (x - 1/2) \cdot (8x^2 + 4x - 2)$. Решая квадратное уравнение, получаем

$$x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}, x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

Очевидно, удовлетворяет только $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Откуда и получаем то, что требуется.

4. Найдите все решения уравнения $x^2 - 12 \cdot [x] + 20 = 0$, где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

Решение. Пусть $[x] = a$. Тогда $a \le x < a+1$. Следовательно, $a^2+20 \le x^2 + 20 < (a + 1)^2 + 20$. Поэтому $a^2 + 20 \le 12 \cdot a < a^2 + 2a + 21$. Получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - 12a + 20 \le 0, \\ a^2 - 10a + 21 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - 10)(a - 2) \le 0, \\ (a - 3)(a - 7) > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in [2; 10], \\ a \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty); \end{cases} \Rightarrow a \in \{2; 8; 9; 10\}.$$

Поскольку $x^2 + 20 = 12a$, то x принимает значения $2;\ 2\sqrt{19};\ 2\sqrt{22};\ 10$.

5. В каждую ячейку таблицы 6×6 поместили числа $+1$ или -1 так, что произведение всех чисел любой строки и любого столбца является положительным. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Заполним квадрат 5×5 числами $+1$ и -1 произвольно. Числа в последнем столбце выберем так, чтобы по первым 5 строкам произведение было положительным, аналогично числа в последней строке по первым 5 столбцам выберем так, чтобы произведение было положительным. Осталось выбрать последнее число.

Обозначим числа, стоящие в последнем столбце, кроме клетки с координатами $(6,6)$ $a_1, ..., a_5$. А числа в последней строке $b_1, ..., b_5$, кроме клетки с координатами $(6,6)$, а число в клетке с координатами $(6,6)$ — c.

Перемножим первые 5 строк и первые 5 столбцов, получим положительное число в силу выбора последней строчки и последнего стобца. С другой стороны, это произведение равно произведению $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_5$. Значит, это произведение положительно, т.е. $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5$ и $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_5$ одного знака. Если $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 > 0$, то $c = 1$, если $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_5 < 0$, то $c = -1$.

Значит, если квадрат 5×5 заполнен, то квадрат 6×6 определяется однозначно, а заполнить квадрат 5×5 чилами $+1$ и -1 можно 2^{25} способами.