8 класс

1. Можно ли найти четыре различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трёх делится на 3, а сумма всех четырёх делится на 4?

2. По кругу расставили в некотором порядке числа от 1 от 8, а затем записали суммы соседних чисел. Могло ли получиться 8 последовательных чисел (в каком-то порядке)?

3. Найдите все различные простые числа a, b и c такие, что $ab + bc + ca \geqslant abc$.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

5. В треугольнике ABC угол A равен $75°$, угол C равен $60°$. На продолжении стороны AC за точку C отложили отрезок CD, равный половине стороны AC. Найдите угол BDC.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. Можно ли найти пять различных натуральных числа, каждое из которых не делится ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых трёх делится на 3, сумма любых четырёх делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5?

2. Известно, что $2x + y^2 + z^2 \leqslant 2$. Докажите, что $x + y + z \leqslant 2$.

3. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что суммы цифр каждого из чисел n и $n + 1$ делятся на 17.

4. За круглым столом сидят 30 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждого спросили: «Сколько рыцарей среди ваших соседей?» (Двое сидящих называются *соседями* друг друга, если между ними нет других сидящих.) 10 человек ответили «один», 10 — «два» и 10 — «ни одного». Каким наибольшим может быть число рыцарей за столом?

5. В треугольнике ABC точка O_1 — центр вписанной окружности. На продолжении стороны AB за точку B выбрана точка D. Окружность с центром O_2 касается отрезка CD и продолжений сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что если $O_1C = O_2C$, то треугольник BCD — равнобедренный.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр больше, чем у любого меньшего его числа.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 9 раз меньше, чем все остальные вместе взятые. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

3. Докажите, что любое нечётное составное число можно представить в виде суммы трёх или более последовательных нечётных положительных слагаемых. Сколько существует таких способов для числа 2021?

4. Пусть x, y и z — действительные числа. Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $f = \cos x \sin y + \cos y \sin z + \cos z \sin x$.

5. Сторона AB треугольника ABC больше стороны BC, а угол B равен 40°. На стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Найдите угол MPT.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Найдите наименьшее 10-значное число, у которого сумма цифр не меньше, чем у любого меньшего его числа.

2. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одному разу. Победитель половину партий выиграл, половину — сыграл вничью. Оказалось, что он набрал очков в 13 раз меньше, чем все остальные. (За победу — 1 очко, за ничью — 0,5, за поражение — 0.) Сколько было шахматистов в турнире?

3. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна 3. Чему равно наибольшее возможное значение площади поверхности у такого параллелепипеда?

4. Все значения квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[\,0;2\,]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|\,a\,|+|\,b\,|+|\,c\,|$? Для какой функции $f(x)$ достигается это значение?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и BB_2 внутреннего и внешнего углов при вершине B. Из точки H пересечения высот опущены перпендикуляры HH_1 и HH_2 на прямые BB_1 и BB_2. В каком отношении прямая H_1H_2 делит сторону AC?

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.