7 класс

Задача 7.1. Площадь бассейна.

Экспериментатор Иннокентий Иванов сделал у себя на даче маленький бассейн глубиной 1,2 м с вертикальными стенками и прямоугольным дном. Для заполнения этого бассейна водой используются два одинаковых насоса. Решив поэкспериментировать, Иннокентий поставил на дно пустого бассейна куб со стороной 40 см и включил один насос. Дождавшись, пока вода поднимется на 60 см, учёный включил ещё и второй насос и заполнил бассейн до краёв. Затем он слил воду, заменил куб на другой, с вдвое большей длиной стороны, и повторил свой эксперимент. Оказалось, что во втором случае вода заполнила бассейн в 1,3 раза быстрее, чем в первом. Какова площадь дна этого бассейна?

Ответ: 1,92 м^2.

Решение: Пусть S — площадь дна бассейна, а v — скорость (объём в единицу времени), с которой подаёт воду один насос.

Рассмотрим **первый** эксперимент Иннокентия. Сначала вода подаётся со скоростью v до высоты 60 см, то есть выше верхней грани куба. Время работы одного насоса равно

$$t_1 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v}.$$

Время работы двух насосов одновременно составляет

$$t_2 = \frac{S \cdot 60\text{ см}}{2v}.$$

Отсюда получаем, что время, за которое наполняется бассейн в первом эксперименте, равно

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v} + \frac{S \cdot 60\text{ см}}{2v} = \frac{S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v}. \tag{7.1.1}$$

Теперь перейдём ко **второму** эксперименту. При работе только одного насоса уровень воды не поднимется выше верхней грани большого куба. Поэтому время работы одного насоса задаётся выражением

$$t_3 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (80\text{ см})^2 \cdot 60\text{ см}}{v} = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 6 \cdot (40\text{ см})^3}{v},$$

а время работы двух насосов —

$$t_4 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (80\text{ см})^2 \cdot 20\text{ см}}{2v} = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 2 \cdot (40\text{ см})^3}{2v}.$$

Отсюда получаем, что время, за которое наполняется бассейн во втором эксперименте, равно

$$T_2 = t_3 + t_4 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 6 \cdot (40\text{ см})^3}{v} + \frac{S \cdot 60\text{ см} - 2 \cdot (40\text{ см})^3}{2v} = \frac{S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3}{v}. \tag{7.1.2}$$

По условию $T_1 = 1{,}3T_2$. Поэтому,

$$\frac{S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v} = 1{,}3\,\frac{S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3}{v} \;\Rightarrow\; S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3 = 1{,}3 \cdot (S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8{,}1 \cdot (40\text{ см})^3 = S \cdot 27\text{ см} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{8{,}1 \cdot (40\text{ см})^3}{27\text{ см}} = 1{,}92\text{ м}^2.$$

Критерии:

1) Записана формула для t_1 . . . . 1 балл
2) Записана формула для t_2 . . . . 1 балл
3) Записана формула для t_3 . . . . 2 балла
4) Записана формула для t_4 . . . . 2 балла
5) Записано верное уравнение для определения S . . . . 2 балла
6) Найдено значение S . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Пункты 1–4 оцениваются полным баллом, даже если соответствующие выражения находятся **сразу** внутри формул, аналогичных (7.1.1) и (7.1.2).

Задача 7.2. Шарики в банке.

Масса баночки с одинаковыми стальными шариками равна 250 г. Масса той же баночки (без шариков), заполненной водой, составляет 66 г. Масса баночки с шариками, полностью залитыми водой — 270 г.

1. Каковы масса и ёмкость баночки?
2. Сколько шариков в баночке, если масса одного шарика равна 9 г?

Вода во втором и третьем случаях наливается до краёв баночки. Плотность стали равна 7,8 г/см^3, плотность воды — 1 г/см^3.

Ответ: 1) 16 г, 50 см^3; 2) 26 штук.

Решение: Пусть m_0 — масса пустой баночки, V_0 — её ёмкость, V — объём **всех** шариков. Тогда

$$m_0 + \rho_{\text{ст}} V = 250\text{ г}, \qquad m_0 + \rho_{\text{в}} V_0 = 66\text{ г}. \tag{7.2.1}$$

Когда в баночке находятся и шарики, и вода, объём воды равен $V_0 - V$. Поэтому

$$m_0 + \rho_{\text{ст}} V + \rho_{\text{в}}(V_0 - V) = 270\text{ г}. \tag{7.2.2}$$

Из первого и третьего уравнения получаем, что

$$\rho_{\text{в}}(V_0 - V) = 270\text{ г} - 250\text{ г} = 20\text{ г} \quad \Rightarrow \quad V_0 - V = 20\text{ см}^3. \tag{7.2.3}$$

В то же время, из второго и третьего уравнения следует, что

$$(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}})V = 270\text{ г} - 66\text{ г} = 204\text{ г} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{204\text{ г}}{6{,}8\text{ г/см}^3} = 30\text{ см}^3.$$

Отсюда получаем, что ёмкость баночки равна $V_0 = 20\text{ см}^3 + 30\text{ см}^3 = 50\text{ см}^3$, а масса баночки

$$m_0 = 66\text{ г} - \rho_{\text{в}} V_0 = 66\text{ г} - 50\text{ г} = 16\text{ г}.$$

Масса всех шариков составляет $m_{\text{ш}} = \rho_{\text{ст}} V = 250\text{ г} - 16\text{ г} = 234\text{ г}$. Соответственно, их количество

$$N = \frac{234\text{ г}}{9\text{ г}} = 26.$$

Критерии:

1) Записаны уравнения (7.2.1)-(7.2.3) или их аналоги . . . . 3 балла (по 1 баллу за каждое уравнение)
2) Найдена ёмкость баночки . . . . 2 балла
3) Найдена масса баночки . . . . 2 балла
4) Найдена масса всех шариков . . . . 2 балла
5) Найдено количество шариков . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Если количество шариков правильно найдено без прямого расчёта их общей массы, баллы за пункт 4 всё равно **выставляются**!

Задача 7.3. Бегуны.

Братья Паша и Дима любят бегать по кольцевой беговой дорожке. Скорость старшего брата Димы в 1,5 раза больше скорости Паши, поэтому Дима пробегает один круг на 20 с быстрее младшего брата. Через какое время после старта очередного забега Дима обгонит Пашу ровно на 2 круга? Мальчики стартуют из одной точки и бегут в одном направлении.

Ответ: 240 с.

Решение: Пусть L — длина круга на беговой дорожке, v — скорость Паши. Паша пробегает один круг за время $t_{\text{П}} = L/v$. Скорость Димы равна $1{,}5v$, а время, за которое от пробежит круг — $t_{\text{Д}} = L/(1{,}5v)$. Тогда

$$t_{\text{П}} - t_{\text{Д}} = \frac{L}{v} - \frac{L}{1{,}5v} = 20\ \text{с} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{3v} = 20\ \text{с} \quad \Rightarrow \quad L = 3v \cdot 20\ \text{с}.$$

Скорость Димы относительно Паши $v_{\text{отн}} = 1{,}5v - v = 0{,}5v$. Следовательно, время, за которое Дима обгонит брата на 2 круга, равно

$$t = \frac{2L}{v_{\text{отн}}} = \frac{2L}{0{,}5v} = \frac{4L}{v} = \frac{4 \cdot 3v \cdot 20\ \text{с}}{v} = 240\ c.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $L/v - L/(1{,}5v) = 20$ с или аналог . . . . 3 балла
2) Записано выражение для времени t, за которое Дима обгонит на 2 круга . . . . 4 балла
3) Найдено значение t . . . . 3 балла

Задача 7.4. Утренний моцион.

Крош и Ёжик с утра пораньше решили прогуляться по лесной тропинке, а заодно испытать свои новые трекер-браслеты. Стартовав одновременно, Смешарики пошли каждый в своём темпе в одном направлении. Однако через 4 км они снова встретились, и Ёжик выключил свой браслет. Пройдя вместе ещё 1 км, они остановились, и Крош тоже выключил свой прибор. К удивлению Смешариков оказалось, что браслет Кроша строил график зависимости пройденного пути от времени, а браслет Ёжика — зависимость скорости от времени (рис. 7.1). Более того, масштаб по шкале времени у обоих графиков полностью отсутствовал.

1. Помогите Смешарикам и определите, чему равна цена деления (значение, соответствующее одной клетке) по шкале времени, если она у обоих приборов одинаковая.

2. Каково максимальное расстояние между Крошем и Ёжиком было во время прогулки?

Оба Смешарика стартуют из одной точки и включили свои браслеты одновременно со стартом.

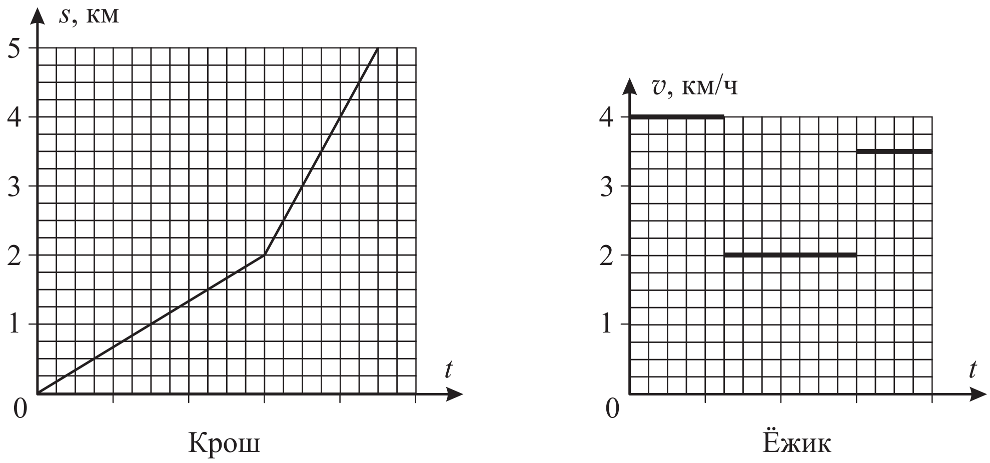


Рис. 7.1.

Ответ: 1) 5 мин; 2) ≈ 830 м.

Решение: 1. Пусть t_0 — цена деления по шкале времени. Смешарики встретились на расстоянии 4 км от старта через время $16t_0$. Используя график, построенный Ёжиком, получаем, что

$$4\ \text{км} = 4\ \text{км/ч} \cdot 5t_0 + 2\ \text{км/ч} \cdot 7t_0 + 3{,}5\ \text{км/ч} \cdot 4t_0 = 48\ \text{км/ч} \cdot t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{4\ \text{км}}{48\ \text{км/ч}} = \frac{1}{12}\ \text{ч} = 5\ \text{мин}.$$

2. Чтобы понять в какой момент расстояние между Крошем и Ёжиком было максимальным, найдём скорости Кроша на обоих участках:

$$v_1 = \frac{2\ \text{км}}{12t_0} = 2\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \qquad v_2 = \frac{3\ \text{км}}{6t_0} = 6\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Отсюда видно, что в течение времени $5t_0$ Ёжик шёл быстрее Кроша, и расстояние между ними увеличивалось. Затем в течение времени $7t_0$ их скорость была одинаковой, а в конце пути скорость Кроша была больше скорости его друга. Следовательно, максимальное расстояние между Смешариками было через время $5t_0$ после старта и оно равно

$$s_{max} = (4\ \text{км/ч} - 2\ \text{км/ч}) \cdot \frac{5}{12}\ \text{ч} = \frac{5}{6}\ \text{км} \approx 830\ \text{м}.$$

Критерии:

1) Найдена цена деления t_0 . . . . 3 балла
2) Найдена скорость Кроша на первом участке . . . . 2 балла
3) Обосновано, что максимальное расстояние будет при $t = 5t_0$ . . . . 2 балла
4) Найдено значение s_{max} . . . . 3 балла

Указание проверяющим: В пункте 3 принимать любое более-менее разумное обоснование. Если оно отсутствует, но s_{max} найдено правильно, то за пункт 3 баллы не ставятся, а за пункт 4 выставляется полный балл.

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Тише едешь — дальше будешь!

Бизнесмен Василий поехал на своём внедорожнике за город на рыбалку. Сначала он ехал по шоссе со скоростью 100 км/ч, где обогнал двигавшийся в попутном направлении со скоростью 30 км/ч трактор. Через некоторое время Василий свернул с шоссе на грунтовую дорогу, ведущую к реке. Из-за прошедших дождей земля раскисла, и внедорожник стал двигаться со скоростью 15 км/ч. Когда Василий добрался до места, оказалось, что туда же одновременно с ним приехал и трактор. Чему равна длина грунтовой дороги к реке, если весь путь от места встречи автомобилей до реки составил 24 км, а скорость трактора по грунтовой дороге равна 20 км/ч? Траектории движения обеих машин совпадают.

Ответ: 14 км.

Решение: Пусть L — длина грунтовой дороги. Тогда (24 км $-$ L) — расстояние от места встречи трактора и автомобиля до съезда с шоссе. Время движения внедорожника равно

$$t_1 = \frac{24\text{ км} - L}{100\text{ км/ч}} + \frac{L}{15\text{ км/ч}},$$

а время движения трактора —

$$t_2 = \frac{24\text{ км} - L}{30\text{ км/ч}} + \frac{L}{20\text{ км/ч}}.$$

Так как автомобиль и трактор подъехали к реке одновременно,

$$t_1 = t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{24\text{ км} - L}{100\text{ км/ч}} + \frac{L}{15\text{ км/ч}} = \frac{24\text{ км} - L}{30\text{ км/ч}} + \frac{L}{20\text{ км/ч}}.$$

Решаем это уравнение и находим L:

$$L\left(\frac{1}{15\text{ км/ч}} - \frac{1}{20\text{ км/ч}}\right) = (24\text{ км} - L)\cdot\left(\frac{1}{30\text{ км/ч}} - \frac{1}{100\text{ км/ч}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{5L}{300\text{ км/ч}} = \frac{7(24\text{ км} - L)}{300\text{ км/ч}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5L = 7(24\text{ км} - L) \quad \Rightarrow \quad L = 14\text{ км}.$$

Критерии:

1) Записано выражение для t_1 . . . . 3 балла
2) Записано выражение для t_2 . . . . 3 балла
3) Записано уравнение для нахождения L . . . . 1 балл
4) Найдено L . . . . 3 балла

Указание проверяющим: Пункты 1 и 2 оцениваются полным баллом, если соответствующие выражения явно представлены внутри уравнения для L.

Задача 8.2. Детство, ах, детство!

Мальчики Дима и Паша всегда любили в парке качаться, сидя на противоположных концах массивного однородного бревна длиной 2,1 м. Бревно с ребятами уравновешивалось, если Дима сидел на расстоянии 98 см от точки опоры. Как-то раз мальчики пришли в парк и обнаружили, что кто-то отпилил от бревна кусок длиной 42 см. Но Дима с Пашей не расстроились и, переставив бревно, снова стали на нём качаться, сев на концы бревна. Оказалось, что теперь бревно с ребятами уравновешивается, если Дима сидит на расстоянии 78 см от точки опоры. Чему равна масса Паши, если масса Димы 55 кг?

Ответ: 45 кг.

Решение: Пусть m_1 — масса Димы, m_2 — масса Паши, а M — начальная масса бревна. Запишем в первом случае правило моментов относительно точки опоры:

$$m_1 g \cdot 98\text{ см} = Mg(105\text{ см} - 98\text{ см}) + m_2 g(210\text{ см} - 98\text{ см}).$$

Упростим и получим, что

$$m_1 \cdot 98\text{ см} = M \cdot 7\text{ см} + m_2 \cdot 112\text{ см} \quad \Rightarrow \quad 14m_1 = M + 16m_2. \tag{8.2.1}$$

Когда от бревна отпилили 42 см, его длина стала равна 168 см, а масса уменьшилась на одну пятую (пропорционально длине) и стала $4M/5$. Запишем во втором случае правило моментов относительно точки опоры:

$$m_1 g \cdot 78\text{ см} = \frac{4}{5} Mg(84\text{ см} - 78\text{ см}) + m_2 g(168\text{ см} - 78\text{ см}).$$

Преобразуем и получим, что

$$m_1 \cdot 78\text{ см} = \frac{4}{5} M \cdot 6\text{ см} + m_2 \cdot 90\text{ см} \quad \Rightarrow \quad 65m_1 = 4M + 75m_2. \tag{8.2.2}$$

Исключаем из уравнений (8.2.1) и (8.2.2) массу M и находим, что

$$65m_1 = 4(14m_1 - 16m_2) + 75m_2 \quad \Rightarrow \quad 9m_1 = 11m_2 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{9m_1}{11} = 45\text{ кг}.$$

Критерии:

1) Записано правило моментов для первого случая . . . . 3 балла
2) Найдена масса бревна во втором случае . . . . 2 балла
3) Записано правило моментов для второго случая . . . . 3 балла
4) Найдена масса Паши . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Пункт 2 оценивается полным баллом, если соответствующее выражение явно присутствует внутри правила моментов для второго случая.

Задача 8.3. Чудо-печка.

Экспериментатор Иннокентий Иванов тестирует купленную в интернет-магазине новую печь. Оказалось, что мощность печи самопроизвольно меняется так, как показано на графике (рис. 8.1), где τ — время, прошедшее с момента её включения. В первый раз Иннокентий положил в печь стальной куб, включил её и нагрел куб до температуры 387 °C за 6 мин. Во второй раз учёный повторил эксперимент со свинцовым кубом вдвое меньшего объёма.

1. Какова масса **стального** куба?
2. За какое время после включения печь полностью расплавит **свинцовый** куб?

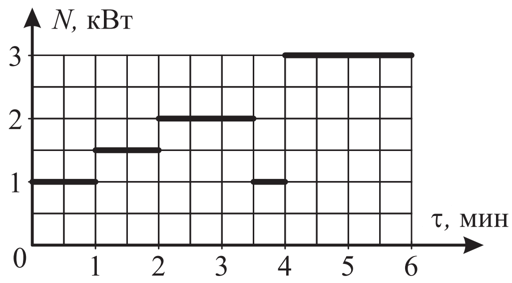


Рис. 8.1.

Начальная температура обоих кубов равна 27 °C. Температура плавления свинца составляет 327 °C, его удельная теплоёмкость — 140 Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления — 23 кДж/кг, а плотность — 11,3 г/см^3. Температура плавления стали около 1500 °C, плотность стали равна 7,8 г/см^3, её удельная теплоёмкость — 500 Дж/(кг · °C). Теплообменом с окружающей средой и теплоёмкостью печи пренебречь.

Ответ: 1) 4 кг; 2) 2 мин 19 с.

Решение: 1. Пусть $m_{ст}$ — масса стального куба. Найдём количество теплоты, отданное печкой за 6 мин:

$$Q_1 = 1 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} + 1{,}5 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} + 2 \text{ кВт} \cdot 90 \text{ с} + 1 \text{ кВт} \cdot 30 \text{ с} + 3 \text{ кВт} \cdot 120 \text{ с} = 720 \text{ кДж}.$$

Эта теплота идёт на нагрев стального куба:

$$c_{ст} m_{ст} (387\,^\circ\text{C} - 27\,^\circ\text{C}) = Q_1 \quad \Rightarrow \quad m_{ст} = \frac{Q_1}{c_{ст} \cdot 360\,^\circ\text{C}} = \frac{720000 \text{ Дж}}{500 \text{ Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)} \cdot 360\,^\circ\text{C}} = 4 \text{ кг}.$$

2. Масса свинцового куба вдвое меньшего объёма равна $m_{св} = \rho_{св} \cdot m_{ст}/(2\rho_{ст}) \approx 2{,}9$ кг. Количество теплоты, необходимое для нагрева свинцового куба до температуры плавления и последующего плавления равно

$$Q_2 = c_{св} m_{св} (327\,^\circ\text{C} - 27\,^\circ\text{C}) + \lambda m_{св} = 140 \text{ Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{C)} \cdot 2{,}9 \text{ кг} \cdot 300\,^\circ\text{C} + 23000 \text{ Дж/кг} \cdot 2{,}9 \text{ кг} = 188500 \text{ Дж}.$$

Чтобы определить время нагрева, заметим, что за первые 2 мин печка отдаёт 1 кВт · 60 с + 1,5 кВт · 60 с = 150 кДж теплоты. Оставшиеся 38,5 кДж печка отдаёт, имея мощность 2 кВт, за время 38,5 кДж/(2 кВт) ≈ 19 с. Таким образом, общее время, необходимое, чтобы расплавить свинцовый куб, составляет 2 мин 19 с.

Критерии:

1) Найдено Q_1 . . . . 3 балла
2) Найдена масса стального куба . . . . 1 балл
3) Записана масса свинцового куба (записана формула или найдено значение) . . . . . . 1 балл
4) Найдено Q_2 . . . . 2 балла
5) Найдено время, необходимое для плавления свинцового куба . . . . . . 3 балла

Задача 8.4. Игры с сообщающимися сосудами.
В цилиндрических сообщающихся сосудах, заполненных неизвестной жидкостью, площадь сечения правого колена в 15 раз больше площади сечения левого, а поверхность жидкости полностью закрыта плоскими невесомыми поршнями. Когда поверх левого поршня налили слой воды высотой 8 см, правый поршень поднялся относительно своего первоначального положения на 4 мм.
1. Какова плотность неизвестной жидкости?
2. Какой высоты слой масла нужно налить теперь поверх правого поршня, чтобы верхние поверхности воды и масла стали на одном уровне?
Плотность воды равна 1000 кг/м^3, плотность масла — 900 кг/м^3. Жидкости из сосудов не выливаются. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

Ответ: 1) 1,25 г/см^3; 2) 5,7 см.

Решение: 1. Пусть ρ — плотность неизвестной жидкости. Рассмотрим первый случай, когда поверх левого поршня налили слой воды. Если правый поршень поднялся на 4 мм, левый поршень опустился на $15 \cdot 4$ мм $=$ $= 60$ мм. Запишем условие равенства давлений на уровне левого поршня:

$$\rho_\text{в} g \cdot 8\text{ см} = \rho g \cdot (6\text{ см} + 0{,}4\text{ см}).$$

Найдём отсюда плотность неизвестной жидкости

$$\rho = \frac{\rho_\text{в} \cdot 8\text{ см}}{6{,}4\text{ см}} = \frac{1\text{ г/см}^3 \cdot 8\text{ см}}{6{,}4\text{ см}} = 1{,}25\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

2. Пусть h — искомая высота слоя масла. Так как масло имеет плотность меньше, чем у воды и неизвестной жидкости, h должно быть меньше высоты слоя воды. Опять запишем условие равенства давлений на уровне левого поршня:

$$\rho_\text{в} g \cdot 8\text{ см} = \rho_\text{м} g h + \rho g \cdot (8\text{ см} - h).$$

Отсюда получаем, что

$$1\text{ г/см}^3 \cdot 8\text{ см} = 0{,}9\text{ г/см}^3 \cdot h + 1{,}25\text{ г/см}^3 \cdot (8\text{ см} - h) \quad \Rightarrow \quad h \approx 5{,}7\text{ см}.$$

Критерии:
1) Найдено, насколько опустился левый поршень в 1-м случае . . . . 1 балл
2) Записано условие равенства давлений в 1-м случае . . . . 3 балла
3) Найдена плотность неизвестной жидкости . . . . 1 балл
4) Записано условие равенства давлений во 2-м случае . . . . 3 балла
5) Найдена высота слоя масла . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Вместо расстояния, на которое опустился левый поршень (пункт 1), может быть сразу найдена разность уровней между поршнями. В этом случае за пункт 1 также ставится полный балл.

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Собачья радость.

Собака Альфа и её щенок Ральф шли рядом по двору со скоростью v. Вдруг Ральф увидел своего хозяина, стоящего впереди на расстоянии L, и радостно бросился к нему с постоянным ускорением a. Добежав до него, щенок резко остановился, развернулся и побежал к маме с тем же по величине постоянным ускорением a.
1. Чему равно ускорение щенка a, если Ральф вернулся к Альфе, имея скорость $2v/3$? Величины v и L считать заданными.
2. Во сколько раз при этом отличается время бега щенка от мамы к хозяину и от хозяина к маме?
Скорость Альфы всё время оставалась постоянной. Временем торможения и разворота щенка, а также размерами собак можно пренебречь.

Ответ: 1) $20v^2/(9L)$; 2) в 2 раза.

Решение: Пусть t_1 — время бега Ральфа от мамы к хозяину, а t_2 — время бега от хозяина к маме. Расстояние от щенка до хозяина равно L, а его начальная скорость равна v. Поэтому

$$L = vt_1 + \frac{at_1^2}{2}. \qquad (9.1.1)$$

В обратную сторону щенок начинает бежать с нулевой скоростью, а добегает до мамы со скоростью $2v/3$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{2v}{3} = at_2, \qquad (9.1.2)$$

$$L - v(t_1 + t_2) = \frac{at_2^2}{2}. \qquad (9.1.3)$$

Из (9.1.2) находим, что $t_2 = 2v/(3a)$, а, исключая L из (9.1.3) и (9.1.1), получаем

$$\frac{at_1^2}{2} = vt_2 + \frac{at_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{at_1^2}{2} = \frac{2v^2}{3a} + \frac{2v^2}{9a} = \frac{8v^2}{9a} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{4v}{3a}.$$

Отсюда следует, что $t_1/t_2 = 2$. Ускорение щенка можно найти, например, из (9.1.1):

$$L = vt_1 + \frac{at_1^2}{2} = \frac{4v^2}{3a} + \frac{8v^2}{9a} = \frac{20v^2}{9a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{20v^2}{9L}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение (9.1.1) . . . . 2 балла
2) Записано уравнение (9.1.3) . . . . 2 балла
3) Записано уравнение (9.1.2) . . . . 1 балл
4) Найдено выражение для t_1 через v и a . . . . 2 балла
5) Найдено, что $t_1/t_2 = 2$ . . . . 1 балл
6) Найдено выражение для a . . . . 2 балла

Задача 9.2. Две жидкости лучше, чем одна!

В большом сосуде с водой плавает деревянный брусок высотой 5 см. Поверх воды аккуратно наливают слой керосина высотой 2 см. На сколько сантиметров после этого брусок будет погружен **в керосин**, а на сколько **в воду**? Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность дерева — 600 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

Ответ: на 2 см в керосин и на 1,4 см в воду.

Решение: Так как плотность дерева меньше плотности керосина, брусок будет плавать, выступая над его поверхностью. При этом бросок не сможет полностью вылезти из воды, поскольку для этого плотность дерева должна быть меньше 2/5 плотности керосина, что не соответствует условию задачи. Отсюда можно сделать вывод, что брусок плавает, частично погружаясь в воду, а частично выступая над поверхностью керосина. Глубина погружения в керосин, очевидно, равна 2 см.

Пусть h — глубина погружения бруска в воду, а S — площадь его основания. Запишем условие плавания:

$$\rho_д g S \cdot 5\text{ см} = \rho_в g S h + \rho_к g S \cdot 2\text{ см}.$$

Сокращая S и g, получаем, что

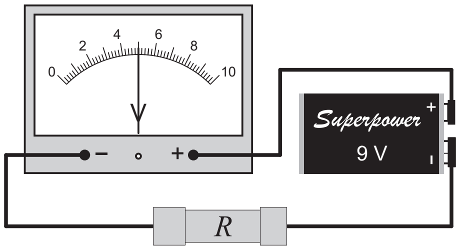
$$\rho_д \cdot 5\text{ см} = \rho_в h + \rho_к \cdot 2\text{ см} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_д \cdot 5\text{ см} - \rho_к \cdot 2\text{ см}}{\rho_в} = \frac{0{,}6\text{ г/см}^3 \cdot 5\text{ см} - 0{,}8\text{ г/см}^3 \cdot 2\text{ см}}{1\text{ г/см}^3} = 1{,}4\text{ см}.$$

Критерии:

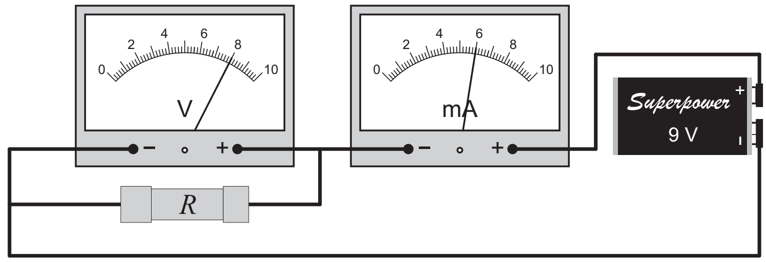
1) Сделан обоснованный вывод о том, что брусок выступает из керосина и погружен в воду . . . . 3 балла
2) Найдена глубина погружения в керосин . . . . 1 балл
3) Записано условие плавания бруска . . . . 4 балла
4) Найдена глубина погружения в воду . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если отсутствует обоснование характера расположения бруска относительно жидкостей, баллы не ставятся **только** за пункт 1. Пункты 2–4, при этом, оцениваются независимо.
2) Обоснование в пункте 1 может быть представлено в различных формах, в том числе в виде рассмотрения различных способов расположения бруска относительно жидкостей с последующим их анализом!

Задача 9.3. Лабораторная работа.
Мальчик Миша решил измерить сопротивление резистора R. Для этого он соединил его последовательно с вольтметром и подключил получившуюся цепь к батарейке (см. рис. 9.1а). Увидев это, отличник Паша решил помочь однокласснику и пересобрал схему (см. рис. 9.1б). Чему равно сопротивление резистора R? Все показания приборов и напряжение источника изображены на рисунках. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



а)



б)

Рис. 9.1.

Ответ: 2,4 кОм.

Решение: Пусть R_V — внутреннее сопротивление вольтметра. Из первого рисунка следует, что напряжение на вольтметре равно 5 В, а напряжение на резисторе составляет 9 В – 5 В = 4 В. Так как вольтметр и резистор соединены последовательно,

$$\frac{5\text{ В}}{R_V} = \frac{4\text{ В}}{R} \quad \Rightarrow \quad R_V = \frac{5R}{4}.$$

На втором рисунке вольтметр и резистор соединены параллельно. Их общее сопротивление равно

$$R_{V+R} = \frac{R_V R}{R_V + R} = \frac{5R}{9}.$$

Напряжение на них равно 8 В, а общая сила тока в цепи — 6 мА, поэтому

$$\frac{5R}{9} = \frac{8\text{ В}}{6\text{ мА}} \quad \Rightarrow \quad R = 2400\text{ Ом}.$$

Критерии:
1) Введено в рассмотрение внутреннее сопротивление вольтметра . . . . 1 балл
2) Записано уравнение (5 В)/R_V = (4 В)/R или его аналог для первого случая . . . . 3 балла
3) Записано уравнение для второго случая, связывающее показания приборов и сопротивления . . . . 3 балла
4) Найдено значение R . . . . 3 балла

Задача 9.4. Работа с калориметром.

τ, мин	1	2	3	4
t, ℃	0	0	2	7

Рис. 9.2.

В теплоизолированный калориметр, содержащий смесь воды со льдом, опускают нагреватель мощностью 140 Вт и начинают ежеминутно измерять температуру, записывая показания в таблицу (рис. 9.2). Сколько граммов воды и сколько граммов льда было первоначально в калориметре? Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · ℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Теплоёмкостью калориметра можно пренебречь.

Ответ: 334 г и 66 г.

Решение: Пусть $m_л$ и $m_в$ — начальные массы льда и воды в калориметре. К концу третьей минуты нагревания льда в калориметре совсем не осталось (температура содержимого равна +2 ℃), поэтому за четвёртую минуту вода массой $m_л + m_в$ нагреется на 5 ℃:

$$c_в(m_л + m_в) \cdot 5\,℃ = 140\text{ Вт} \cdot 60\text{ с} = 8400\text{ Дж}. \tag{9.4.1}$$

Отсюда получаем общую массу содержимого калориметра:

$$m_л + m_в = \frac{8400\text{ Дж}}{4200\text{ Дж/(кг}\cdot℃) \cdot 5\,℃} = 0{,}4\text{ кг}.$$

За первые три минуты лёд расплавился и вся вода нагрелась на 2 ℃:

$$\lambda m_л + c_в(m_л + m_в) \cdot 2\,℃ = 140\text{ Вт} \cdot 180\text{ с} = 25200\text{ Дж}. \tag{9.4.2}$$

Отсюда находим массу льда:

$$m_л = \frac{25200\text{ Дж} - c_в(m_л + m_в)\cdot 2\,℃}{\lambda} = \frac{25200\text{ Дж} - 3360\text{ Дж}}{330000\text{ Дж/кг}} \approx 66\text{ г}.$$

Начальная масса воды, соответственно, равна $m_в = 400\text{ г} - m_л = 334$ г.

Критерии:

1) Записано первое уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
2) Записано второе уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
3) Найдена масса льда . . . . 2 балла
4) Найдена масса воды . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Базовые уравнения (пункты 1 и 2) могут быть записаны для различных временных отрезков и в разной форме (не обязательно такие, как (9.4.1) и (9.4.2)!). Если уравнения верные и математически независимые, то за пункты 1 и 2 ставится полный балл. Если присутствует только одно верное уравнение, то полный балл ставится только за пункт 1.

Задача 9.5. Тяжесть знаний.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил сделать на даче полку для книг. Для этого он взял доску массой M и длиной $3L$ и положил её симметрично на две горизонтальные опоры. Расстояние между опорами равно L. Забыв закрепить доску на опорах, Иннокентий стал выставлять на полку, начиная с края, свои книги (рис. 9.3). При каком минимальном количестве книг полка опрокинется? Каждая книга имеет массу $M/15$ и толщину $L/40$. Полку считать однородной. Книги ставятся вплотную друг к другу. Каждую книгу можно считать однородным параллелепипедом.

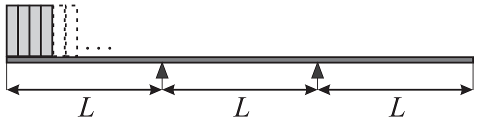


Рис. 9.3.

Ответ: 9 штук.

Решение: Пусть n — количество книг на полке. Изобразим силы, действующие на полку в критическом случае, когда она практически опрокинулась, то есть когда сила давления на правую опору равна нулю (рис. 9.4), и запишем правило моментов относительно левой точки опоры:

$$\frac{nMg}{15}\cdot\left(L-\frac{nL/40}{2}\right)=Mg\frac{L}{2}.$$

Сокращая M, g и L, получаем квадратное уравнение на n:

$$\frac{n}{15}\left(1-\frac{n}{80}\right)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad n^2-80n+600=0.$$

Решением этого уравнения являются числа $n_1\approx 8{,}4$ и $n_2\approx 71{,}6$. Следовательно, при $n=8$ полка ещё не перевернётся, а при $n=9$ — уже опрокинется.

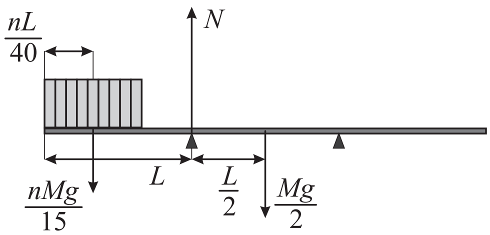


Рис. 9.4.

Критерии:

1) Записано правило моментов . . . . 4 балла
2) Записано квадратное уравнение для n . . . . 2 балла
3) Найдено решение уравнения (достаточно только наименьшего, $n_1\approx 8{,}4$) . . . . 2 балла
4) Записан правильный ответ, $n=9$ . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Жонглёр.

Артист в цирке жонглирует мячиками, перебрасывая их из левой руки в правую и обратно. Известно, что левой (по рисунку) рукой он бросает мячик под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а правой — под углом β (см. рис. 10.1).
1. Чему равен угол β, если время полёта мячика из правой руки в левую в 3 раза больше, чем из левой в правую?
2. Найдите отношение v_2/v_1 начальных скоростей, с которыми жонглёр бросает мячики правой и левой рукой.
Руки жонглёра находятся на одной горизонтали и практически не смещаются. Сопротивлением воздуха пренебречь.

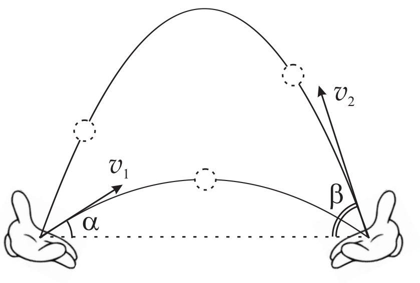


Рис. 10.1.

Ответ: 1) $\beta = \operatorname{arctg} 3\sqrt{3} \approx 79^\circ$; 2) $v_2/v_1 = \sqrt{7/3} \approx 1{,}53$.

Решение: Пусть t — время полёта мячика из левой руки в правую, а $3t$ — из правой в левую. Тогда

$$\begin{cases} t = 2v_1 \sin\alpha/g, \\ 3t = 2v_2 \sin\beta/g. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta.$$

С другой стороны, дальность полёта мячика по обеим траекториям одинаковая, поэтому

$$v_1 t \cos\alpha = v_2 \cdot 3t \cos\beta \quad \Rightarrow \quad v_1 \cos\alpha = 3v_2 \cos\beta.$$

Поделим полученные уравнения друг на друга:

$$3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\beta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta = 9 \operatorname{tg}\alpha = 3\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg} 3\sqrt{3} \approx 79^\circ.$$

Найдём теперь отношение начальных скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos\alpha}{3\cos\beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{3}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{3}\sqrt{28} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}53.$$

Критерии:

1) Записаны формулы для времён полёта . . . . 2 балла
2) Записаны формулы для дальности полёта . . . . 1 балл
3) Записано равенство дальностей в обоих случаях . . . . 2 балла
4) Найден угол β . . . . 3 балла
5) Найдено отношение начальных скоростей . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если формулы для дальности полёта написаны сразу внутри равенства из пункта 3, пункт 2 также оценивается полным числом баллов.
2) Ответ на пункт 4 может быть представлен как 79°, $\operatorname{arctg} 3\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 3\sqrt{3}$ или другими эквивалентными способами. Все подобные варианты оцениваются полным баллом.
3) Ответ на пункт 5 может быть представлен десятичной дробью, как $\sqrt{7/3}$ или иным эквивалентным способом. Все подобные варианты оцениваются полным баллом.

Задача 10.2. Старая басня на новый лад.

Как-то раз Лебедь и Щука решили «пошутить» над спящим на берегу Раком. Они привязали к нему две верёвки, Лебедь со своей верёвкой взлетел в небо, а Щука со своей нырнула в воду. С какой горизонтальной скоростью u движется Рак в тот момент, когда обе верёвки образуют угол α с горизонталью, скорость Лебедя равна $3v/2$ и направлена вертикально вверх, а скорость Щуки равна v и направлена горизонтально (см. рис. 10.2)? Чему равен в этом случае угол наклона α? Все движения происходят в плоскости рисунка. Верёвки считать нерастяжимыми.

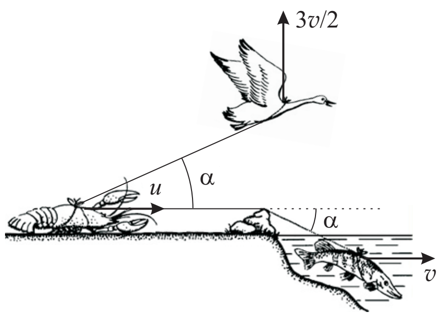


Рис. 10.2.

Ответ: $u = v\sqrt{3}/2$, $\alpha = 30^\circ$.

Решение: Так как каждая верёвка нерастяжима, проекции скоростей обоих её концов на направление этой верёвки должны быть равны. Например, для верёвки, связывающей Рака и Щуку, получаем

$$u = v\cos\alpha.$$

Здесь скорость Щуки спроецирована на направление верёвки, которое она имеет справа от камня, так как камень в этой системе играет роль неподвижного блока.

Для верёвки, связывающей Лебедя и Рака, получаем, что

$$u\cos\alpha = \frac{3v}{2}\sin\alpha.$$

Исключаем отсюда u:

$$v\cos^2\alpha = \frac{3v}{2}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad 1 - \sin^2\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha.$$

Решаем это квадратное уравнение и, отбрасывая отрицательный корень, находим, что

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha = 30^\circ.$$

Следовательно, $u = v\cos 30^\circ = v\sqrt{3}/2$.

Критерии:

1) Записана формула $u = v\cos\alpha$ . . . . 3 балла
2) Записана формула $u\cos\alpha = 3v/2\cdot\sin\alpha$ . . . . 3 балла
3) Найден угол α . . . . 2 балла
4) Найдена скорость u . . . . 2 балла

Задача 10.3. Лампочка.
Мальчик Паша исследовал зависимость силы тока, проходящего через спираль маленькой лампочки накаливания, от приложенного к ней напряжения. В результате своих измерений он получил график, изображённый на рис. 10.3а, а также выяснил, что при напряжении 2,0 В температура спирали лампочки составляет 525 °C.
1. Каково сопротивление R_0 спирали отключённой лампочки при комнатной температуре 25 °C?
2. Какова температура спирали лампочки при напряжении 0,8 В?
3. Какова мощность, выделяемая спиралью лампочки, если температура спирали 300 °C?
При нагревании спирали её сопротивление R изменяется согласно графику, представленному на рис. 10.3б, где Δt — разность температур спирали и комнаты. Сопротивлением нелинейного элемента (лампочки) называется отношение напряжения на этом элементе к силе тока, текущего через него.

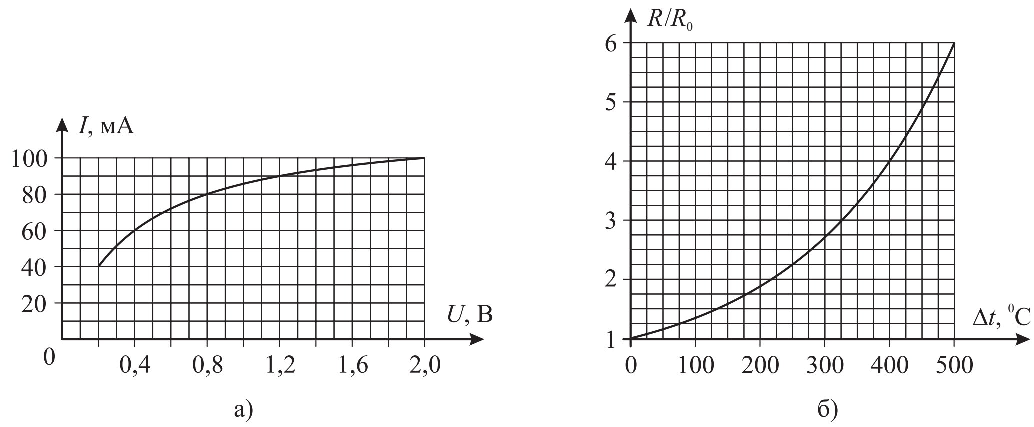


Рис. 10.3.

Ответ: 1) 3,3 Ом; 2) 350 °C; 3) $\approx$ 42 мВт.

Решение: 1. При напряжении 2,0 В сопротивление спирали равно $R_1 = 2$ В/(0,1А) $= 20$ Ом. Температура спирали отличается от комнатной на 500 °C. Следовательно, её сопротивление должно, по графику 10.3б, отличаться от R_1 в 6 раз:

$$R_0 = \frac{R_1}{6} = \frac{10}{3}\ \text{Ом} \approx 3{,}3\ \text{Ом}.$$

2. При напряжении 0,8 В сила тока, согласно графику 10.3а, равна 80 мА. Сопротивление спирали в этом случае составляет $R_2 = 0{,}8$ В/(0,08 А) $= 10$ Ом, что в 3 раза больше сопротивления спирали при комнатной температуре. По графику 10.3б определяем, что температура спирали превышает комнатную на 325 °C, то есть равна 350 °C.

3. Если температура спирали равна 300 °C, то её сопротивление равно $R_3 = 2{,}5R_0 = 25/3$ Ом. Чтобы найти значения силы тока и напряжения, заметим что они должны, с одной стороны, соответствовать какой-либо точке на графике 10.3а, а с другой — удовлетворять условию $U = IR_3$. Построим прямую $I = 3/(25\ \text{Ом}) \cdot U$ на этом графике и найдём их точку пересечения (см. рис. 10.4). Получается, что $I \approx 70$ мА, а $U \approx 0{,}6$ В. Следовательно, мощность спирали равна $P = UI \approx 42$ мВт.

Примечание: Если напряжение $U = 0{,}6$ В подставить в уравнение прямой $I = 3/25\ \text{Ом} \cdot U$, то получится $I = 72$ мА. Это даёт значение мощности $P = 43{,}2$ мВт.

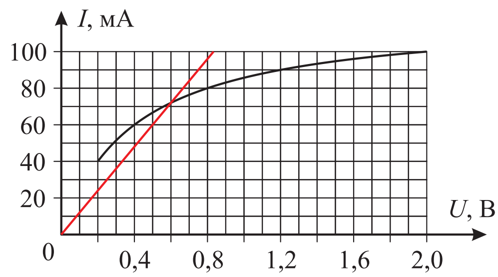


Рис. 10.4.

Критерии:
1) Найдено сопротивление спирали при комнатной температуре . . . . 2 балла
2) Найдена температура спирали при 0,8 В . . . . 2 балла
3) Найдено сопротивление R_3 спирали при 300 °C . . . . 1 балл
4) Построена прямая $I = 1/R_3 \cdot U$ . . . . 2 балла
5) Найдены правильные координаты точки пересечения прямой с графиком $I(U)$ (возможно, «на глаз») . . . . . . 2 балла
6) Найдено правильное значение мощности . . . . 1 балл

Указания проверяющим: 1) Если не учтена комнатная температура при расчёте сопротивления, то за соответсвующий пункт (пункты 1–3) снимать 1 балл.
2) Если по неверному значению R_3 построена соответствующая ему прямая $I = 1/R_3 \cdot U$, баллы за пункт 4 ставить в полном объёме.
3) Координаты точки пересечения и значение мощности, приведённые в работе, могут незначительно отличаться от написанных выше! Если все построения верны, то, в этом случае, за пункты 5 и 6 нужно ставить полный балл. Если отклонения значительны (> 10%), баллы за эти пункты не ставить.

Задача 10.4. Карусель.

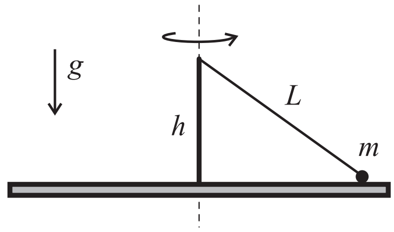


Рис. 10.5.

Гладкая горизонтальная платформа способна вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через стойку высотой $h = 18$ см. К вершине стойки привязана лёгкая нерастяжимая нить длиной $L = 30$ см, на другом конце которой находится груз массой $m = 100$ г (см. рис. 10.5). Платформу медленно раскручивают.

1. С какой минимальной частотой (в оборотах в секунду) должна вращаться платформа, чтобы груз оторвался от неё?

2. С какой частотой (в оборотах в секунду) должна вращаться платформа, чтобы нить порвалась, если предельное натяжение нити равно $T_{\text{пред}} = 4{,}8$ Н?

3. На какой высоте над платформой будет находиться груз в момент обрыва нити?

Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 1) 1,2 об/с; 2) 2 об/с; 3) 11,8 см.

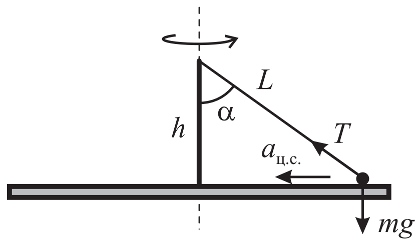


Рис. 10.6.

Решение: 1. В момент отрыва груза массы m от платформы на него действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T (см. рис. 10.6). Сила реакции опоры в момент отрыва равна нулю. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$ma_{\text{ц.с.}} = T\sin\alpha, \qquad 0 = T\cos\alpha - mg. \qquad (10.4.1)$$

Центростремительное ускорение груза равно $a_{\text{ц.с.}} = (2\pi\nu)^2 L\sin\alpha$, где $L\sin\alpha$ — радиус окружности, по которой движется груз, ν — частота вращения платформы. Тогда

$$m\cdot(2\pi\nu)^2 L\sin\alpha = T\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad T = 4\pi^2\nu^2 mL. \qquad (10.4.2)$$

Подставляя найденное выражение для T во второе уравнение и учитывая, что $L\cos\alpha = h$, получаем

$$4\pi^2\nu^2 mL\cos\alpha - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad 4\pi^2\nu^2 h = g \quad\Rightarrow\quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} \approx 1{,}2\ \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

2. Если груз уже оторвался от платформы, угол отклонения нити станет β ($\beta > \alpha$). Однако формула (10.4.1) останется, с точностью до замены α на β, справедливой. В формуле же (10.4.2) для силы натяжения зависимость от угла вообще отсутствует. Если $T = T_{\text{пред}}$, соответствующая частота вращения платформы будет равна

$$\nu_{\text{пред}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T_{\text{пред}}}{mL}} \approx 2{,}0\ \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

3. Высота H, на которой находится груз в момент разрыва нити, равна $H = h - L\cos\beta$. Так как $\cos\beta = T_{\text{пред}}/(mg)$, получаем, что

$$H = h - \frac{mgL}{T_{\text{пред}}} = 0{,}18\text{ м} - \frac{0{,}1\text{ кг}\cdot 10\text{ м/с}^2\cdot 0{,}3\text{ м}}{4{,}8\text{ Н}} \approx 0{,}118\text{ м}.$$

Критерии:

1) Записан 2-й закон Ньютона для груза в момент отрыва . . . . 2 балла (1 балл за каждую проекцию)
2) Записана формула $a_{\text{ц.с.}}$ с правильным радиусом траектории груза . . . . 2 балла
3) Найдена частота ν, соответствующая отрыву . . . . 2 балла
4) Найдена частота $\nu_{\text{пред}}$ . . . . 2 балла
5) Найдена высота H . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Если в решении найдена, вместо частоты, угловая скорость $\omega = 2\pi\nu$, пункты 3 и 4 оцениваются, максимум, в 1 балл из двух.

Задача 10.5. Оптика на клочке бумаги.

Экспериментатор Иннокентий Иванов, разбирая свой архив, обнаружил клочок бумаги с рисунком оптической системы, состоящей из собирающей линзы и лазера, находившегося слева от линзы на её главной оптической оси. Согласно сохранившимся записям, луч, испущенный лазером, преломлялся в линзе. Однако со временем рисунок выцвел, и от нарисованного луча остались лишь две точки (A и B), а из всех элементов оптической системы уцелело только изображение линзы с её главной оптической осью и фокусами (см. рис. 10.7). Проведите необходимые построения и определите положение лазера и точку пересечения луча с главной оптической осью справа от линзы.

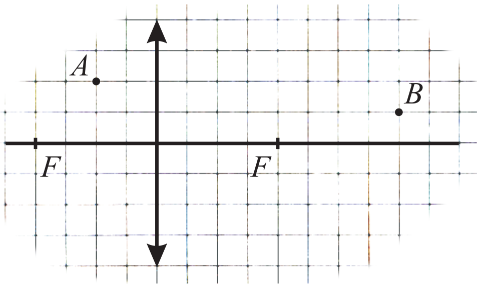


Рис. 10.7.

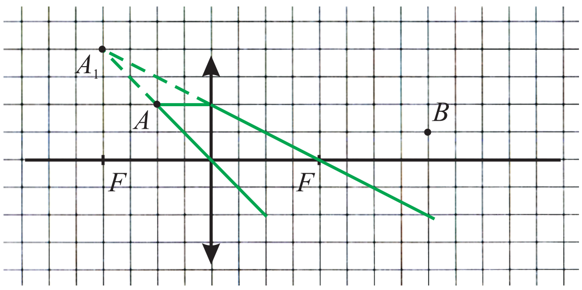
Ответ: см. построения в решении.

Решение: Шаг №1. Построим точку A', являющуюся мнимым изображением в линзе точки A (рис. 10.8а).

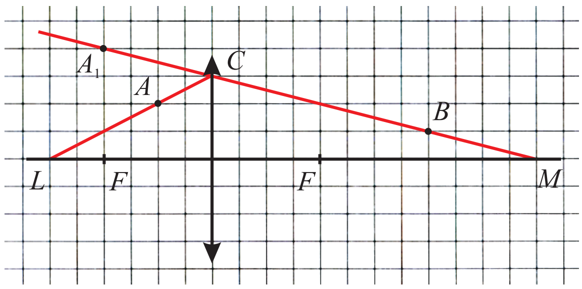
Шаг №2. Все лучи, выходящие из точки A, после прохождения линзы будут направлены так, чтобы их продолжения попадали в точку A'. Так как луч лазера также проходит через точку A, после своего преломления он пойдёт так, чтобы его продолжение попадало в точку A'. Следовательно, он будет направлен по прямой $A'B$.

Шаг №3. Проведём прямую $A'B$. Пусть C — точка пересечения линзы и этой прямой (рис. 10.8б). Тогда слева от линзы луч лазера идёт вдоль луча CA, а справа от линзы — вдоль луча CB.

Шаг №4. В точке L пересечения CA и главной оптической оси находится лазер. Точка пересечения луча CB и главной оптической оси — точка M (рис. 10.8б).



а)



б)

Рис. 10.8.

Примечание: Тот же результат получится, если построение начать с изображения в линзе точки B (точки B')!

Критерии:

1) Построено изображение точки A (или точки B) . . . . 2 балла
2) Построена прямая $A'B$ (или, соответственно, AB') . . . . 2 балла
3) Обоснование построения прямой $A'B$ (AB') . . . . 2 балла
4) Построен луч CA (или, соответственно, CB) . . . . 2 балла
5) Найдено положение лазера . . . . 1 балл
6) Найдено положение точки M . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Необходимые построения, скорее всего, будут выполнены на одном чертеже. В приведённом выше решении они сделаны на разных чертежах исключительно для наглядности!

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Мы здесь чужие…

Космический корабль взлетает с поверхности планеты LV-426 с помощью двигателей, дающих постоянную силу тяги, в четыре раза превышающую силу тяжести, действующую на корабль на поверхности этой планеты.
1. На каком минимальном расстоянии s от поверхности планеты можно выключить двигатели корабля, чтобы он навсегда покинул LV-426?
2. Какой будет скорость корабля на бесконечности, если двигатели выключить на расстоянии $3s$ от поверхности планеты?
Планета LV-426 представляет собой однородный шар массой M и радиусом R, полностью лишенный атмосферы. Изменением массы корабля из-за расхода топлива пренебречь.

Ответ: $s = R/4$, $v = \sqrt{4GM/R}$.

Решение: Пусть m — масса космического корабля. Его полная энергия на поверхности планеты равна потенциальной энергии $E_1 = -GmM/R$. На бесконечном расстоянии от планеты полная энергия корабля равна его кинетической энергии $E_2 = mv^2/2$, где v — скорость корабля вдали от планеты (на бесконечности). Изменение полной энергии корабля равно работе силы тяги двигателя F на протяжении расстояния L:

$$E_2 - E_1 = FL.$$

По условию эта сила F в 4 раза превышает силу тяжести на поверхности планеты, следовательно $F = 4GmM/R^2$.

Рассмотрим первый случай. Минимальное расстояние $L = s$ соответствует нулевой скорости на бесконечности, $v = 0$. Отсюда получаем, что

$$\frac{GmM}{R} = \frac{4GmM}{R^2} \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{R}{4}.$$

Во втором случае $L = 3s$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{GmM}{R} = \frac{4GmM}{R^2} \cdot 3s \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} + \frac{GmM}{R} = \frac{3GmM}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4GM}{R}}.$$

Критерии:

1) Записано выражение для силы тяги . . . . 1 балл
2) Записано выражение для начальной энергии корабля . . . . 1 балл
3) Записан закон изменения энергии в первом случае . . . . 2 балла
4) Найдено s . . . . 2 балла
5) Записан закон изменения энергии во втором случае . . . . 2 балла
6) Найдено выражение скорости на бесконечности во втором случае . . . . 2 балла

Задача 11.2. Сухое сжатие.

Теплоизолированный сосуд заполнен воздухом при атмосферном давлении и температуре $T_в = 295$ К. В него помещают кусочек сухого льда массой $m_л = 5$ г, имеющий температуру $T_л = 195$ К, и быстро, но аккуратно, закрывают сверху невесомым подвижным теплоизолированным поршнем.

1. Какая температура установится в сосуде, если начальный объём под поршнем равен $V_0 = 10$ л?
2. Каким станет объём под поршнем после установления теплового равновесия?

Сухой лёд — твёрдая фаза углекислого газа, которая при температуре $T_л = 195$ К переходит, минуя жидкую фазу, в газообразную. Удельная теплота возгонки сухого льда равна $L = 600$ кДж/кг, молярная масса углекислого газа $M_{CO_2} = 44$ г/моль. Воздух в сосуде «сухой», то есть не содержит водяного пара. Атмосферное давление во время эксперимента остаётся постоянным и равным $p_0 = 100$ кПа. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль).

Ответ: 1) 195 К; 2) 7,3 л.

Решение: 1. Найдём количество теплоты, необходимое для возгонки льда: $Q_л = Lm_л = 3000$ Дж. Теперь оценим максимальное количество теплоты, которое может отдать воздух, изобарно охлаждающийся до $T_л = 195$ К. Для простоты будет считать, что газ сжимается до нулевого объёма (на самом деле, так быть не может, но мы хотим получить ограничение сверху). Тогда

$$Q_{max} = \frac{5}{2}\nu_в R(T_в - T_л) + p_0V_0,$$

где множитель 5/2 учитывает, что воздух — смесь, преимущественно, **двухатомных** газов. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $\nu_в RT_в = p_0V_0$, поэтому

$$Q_{max} = \frac{5}{2}p_0V_0 \cdot \frac{T_в - T_л}{T_в} + p_0V_0 = 847 \text{ Дж} + 1000 \text{ Дж} = 1847 \text{ Дж}.$$

Найденное значение меньше, чем $Q_л$, следовательно весь лёд испариться не сможет, а в сосуде установится температура $T_л = 195$ К.

2. Пусть ν_{CO_2} — количество испарившегося углекислого газа, а V — новый объём газов в сосуде. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для конечного состояния:

$$p_0V = (\nu_{CO_2} + \nu_в)RT_л \quad \Rightarrow \quad \nu_{CO_2} = \frac{p_0V}{RT_л} - \nu_в = \frac{p_0V}{RT_л} - \frac{p_0V_0}{RT_в}.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$0 = LM_{CO_2}\nu_{CO_2} + \frac{5}{2}\nu_в R(T_л - T_в) + p_0(V - V_0) = LM_{CO_2}\nu_{CO_2} - Q_{max} + p_0V.$$

Отсюда получаем, что

$$0 = LM_{CO_2}\left(\frac{p_0V}{RT_л} - \frac{p_0V_0}{RT_в}\right) - Q_{max} + p_0V \quad \Rightarrow \quad Q_{max} + \frac{p_0V_0LM_{CO_2}}{RT_в} = p_0V\left(1 + \frac{LM_{CO_2}}{RT_л}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{p_0}\left(Q_{max} + \frac{p_0V_0LM_{CO_2}}{RT_в}\right) \cdot \left(1 + \frac{LM_{CO_2}}{RT_л}\right)^{-1} = 7{,}3 \text{ л}.$$

Критерии:

1) Записано правильное выражение для внутренней энергии воздуха . . . . 1 балл
2) Адекватным способом определена конечная температура в сосуде . . . . 2 балла
3) Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для конечного состояния . . . . 2 балла
4) Записано первое начало термодинамики . . . . 3 балла
5) Найден конечный объём сосуда . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если в выражении для внутренней энергии вместо множителя 5/2 написано 3/2, баллы не ставятся только за пункты 1 и 5. Остальные пункты критериев оцениваются независимо от этого.

2) Правильное выражение для внутренней энергии, написанное сразу внутри формулы для теплоты, оценивается полный числом баллов за пункт 1.

Задача 11.3. Летим насквозь.
Положительно заряженная частица с зарядом q влетает в систему из четырёх одинаковых плоских металлических сеток, которые попарно подключены к двум источникам постоянного напряжения $\mathscr{E}$ и $5\mathscr{E}$ (см. рис. 11.1). Расстояние между второй и третьей сетками равно $a = d/2$.
1. Какова должна быть минимальная начальная кинетическая энергия этой частицы, чтобы она смогла пролететь сквозь всю систему сеток?
2. Насколько увеличится кинетическая энергия частицы после пролёта сквозь эту систему? Размеры сеток намного больше расстояния между ними. Электрическое поле между соседними сетками считать однородным. До подключения источников сетки были не заряжены.

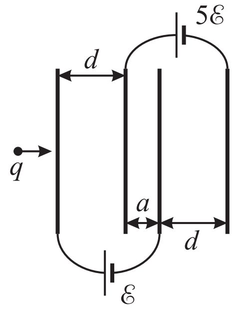


Рис. 11.1.

Ответ: 1) $q\mathscr{E}/2$; 2) на $9q\mathscr{E}/2$.

Решение: Пусть S — площадь одной сетки. Так как до подключения источников сетки были незаряжены, после подключения заряды первой (если смотреть слева направо) и третьей сеток будут равны q_1 и $-q_1$, а заряды второй и четвёртой, соответственно, q_2 и $-q_2$. Найдём напряженность электрического поля между сетками:

$$E_{12} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S},$$

$$E_{23} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0 S},$$

$$E_{34} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда следует, что $E_{12} + E_{34} = E_{23}$. С другой стороны,

$$E_{12}d + E_{23}\frac{d}{2} = \mathscr{E}, \qquad E_{23}\frac{d}{2} + E_{34}d = 5\mathscr{E}.$$

Решая получившуюся систему, находим, что

$$E_{12} = -\frac{\mathscr{E}}{2d}, \qquad E_{23} = \frac{3\mathscr{E}}{d}, \qquad E_{34} = \frac{7\mathscr{E}}{2d}. \tag{11.3.1}$$

Знак минус в выражении для E_{12} означает, что поле между первой и второй сетками тормозит влетающую в систему положительно заряженную частицу. Поля между остальными сетками являются ускоряющими. Поэтому минимальная начальная кинетическая энергия частицы W_0, необходимая ей для пролёта сквозь всю систему сеток, определяется из уравнения

$$0 - W_0 = qE_{12}d \quad \Rightarrow \quad W_0 = \frac{q\mathscr{E}}{2}.$$

Если частица смогла пролететь систему насквозь, её кинетическая энергия изменится на величину

$$\Delta W = qE_{12}d + qE_{23}\frac{d}{2} + qE_{34}d = \frac{9q\mathscr{E}}{2}.$$

Критерии:

1) Записаны формулы, выражающие напряжённости поля между пластинами через заряды . . . . 2 балла
2) Записаны формулы, связывающие напряжённости поля между пластинами и ЭДС источников . . . 2 балла
3) Найдены формулы (11.3.1) . . . . 2 балла
4) Найдена минимальная начальная кинетическая энергия (вопрос 1) . . . . 2 балла
5) Найдено изменение кинетической энергии (вопрос 2) . . . . 2 балла

Задача 11.4. Грузы на блоках.

Каковы ускорения грузов в системе, изображённой на рис. 11.2? Груз какой массы нужно повесить вместо груза массой $3m$, чтобы груз массы m двигался с тем же по модулю ускорением, что и в первом случае, но направленным в противоположную сторону? Блоки считать невесомыми, нити — невесомыми и нерастяжимыми. Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.

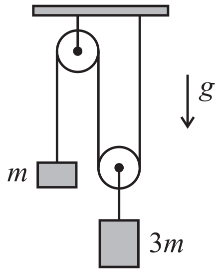


Рис. 11.2.

Ответ: $2g/7$ и $g/7$, $5m/4$.

Решение: Пусть a — ускорение груза массой $3m$, направленное вниз. Тогда ускорение груза массой m направлено вверх и равно $2a$. Изобразим силы (рис. 11.3) и запишем 2-й закон Ньютона для обоих грузов (T — сила натяжения основной нити):

$$3ma = 3mg - 2T, \qquad m \cdot 2a = T - mg.$$

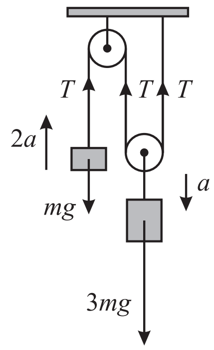


Рис. 11.3.

Исключая отсюда T, получаем, что

$$3ma + 4ma = 3mg - 2mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{7}.$$

Соответственно, ускорение груза массой m равно $2g/7$.

Заменим теперь массу тяжёлого груза на m_1, а у ускорений обоих грузов поменяем направление. Тогда

$$m_1 a = 2T' - m_1 g, \qquad m \cdot 2a = mg - T'.$$

Новая сила натяжения нити T' не совпадает с T. Исключая отсюда T' и подставляя $a = g/7$, получаем, что

$$m_1 a + 4ma = 2mg - m_1 g \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 g}{7} + \frac{4mg}{7} = 2mg - m_1 g \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{5m}{4}.$$

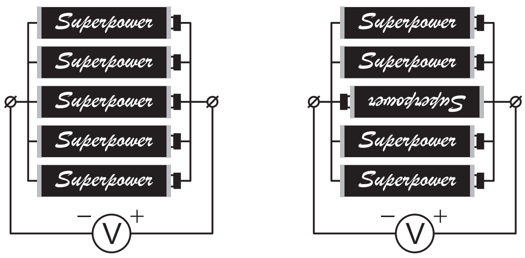
Критерии:

1) Записана связь между ускорениями . . . . 2 балла
2) Записан 2-й закон Ньютона для обоих тел в первом случае . . . . 2 балла (по 1 баллу за каждое)
3) Найдены ускорения грузов . . . . 2 балла
4) Записан 2-й закон Ньютона для обоих тел во втором случае . . . . 2 балла (по 1 баллу за каждое)
5) Найдена новая масса второго груза . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Правильная связь между ускорениями, подставленная сразу во 2-й закон Ньютона, оценивается полный числом баллов за пункт 1.

Задача 11.5. Параллельное соединение.

Блок из пяти одинаковых батареек, соединённых **параллельно** (рис. 11.4а), даёт на выводах напряжение U_0. Какое напряжение будет давать тот же блок, в котором у одной батарейки перепутана полярность (рис. 11.4б)? Напряжение на выводах блока из батареек в обоих случаях измеряется идеальным вольтметром. Считать, что ЭДС батарейки не меняется со временем. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



а) б)

Рис. 11.4.

Ответ: $3U_0/5$.

Решение: Пусть ЭДС одной батарейки равна $\mathscr{E}$, а её внутреннее сопротивление — r. В первом случае токи через батарейки не текут, поэтому напряжение на каждой батарейке равно ЭДС, $U_0 = \mathscr{E}$. Рассмотрим теперь второй случай. Нарисуем схему (рис. 11.5) и изобразим на ней токи, текущие через батарейки. В силу симметрии, все токи, текущие через батарейки с правильной полярностью, равны I. Так как ток через идеальный вольтметр не течёт, то через батарейку с обратной полярностью течёт ток $4I$. Запишем 2ое правило Кирхгофа для любого контура, содержащего батарейки и с правильной, и с обратной полярностями:

$$2\mathscr{E} = Ir + 4Ir \quad \Rightarrow \quad Ir = \frac{2\mathscr{E}}{5}.$$

Отсюда получаем, что напряжение на выводах батарейного блока во втором случае равно

$$U = \mathscr{E} - Ir = \frac{3\mathscr{E}}{5} = \frac{3U_0}{5}.$$

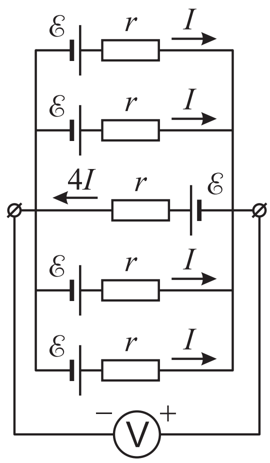


Рис. 11.5.

Примечание: Тот же ответ получится, если использовать формулу $U = -(\mathscr{E} - 4Ir)$, где минус появляется из-за того, что полярность средней батарейки противоположна полярности вольтметра.

Критерии:

1) Найдена ЭДС одной батарейки . . . . 2 балла
2) Записана связь между токами во втором случае . . . . 2 балла
3) Записана связь между $\mathscr{E}$ и силой тока через батарейку (например, второе правило Кирхгофа) . . . . 3 балла
4) Найдено напряжение на выводах во втором случае . . . . 3 балла

Указание проверяющим: Обратите внимание на то, что соединение батареек в решении должно быть именно **параллельным**. Решение, в котором рассматривается только **последовательное** соединение источников, должно оцениваться в ноль баллов, независимо от полученного ответа.

Максимально возможный балл в 11 классе 50