Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

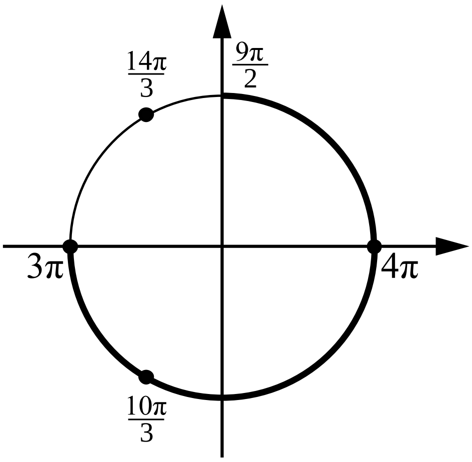
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sin x;\qquad \sin x(1+2\cos x)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$ или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, где $n, k, m\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем $x=3\pi$, $x=\frac{10\pi}{3}$ и $x=4\pi$.

Ответ: а) πn, $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi m$, $n, k, m\in\mathbb{Z}$; б) 3π, $\frac{10\pi}{3}$, 4π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

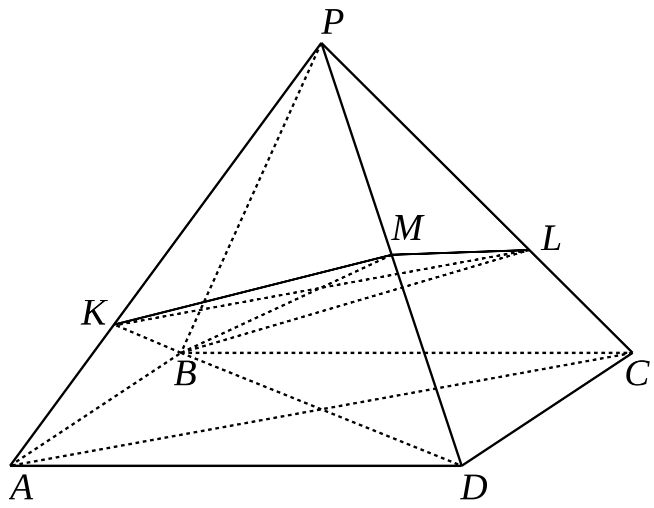
14 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.

а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = 6\sqrt{2}$ и $BM = 3\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $36 = 144(1 - \cos\angle APD)$, откуда $\cos\angle APD = \frac{3}{4}$.

Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \frac{PM}{\cos\angle APD} = 4\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL = 4\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 4\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM \cdot KL = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{(x+4)^2}\left(3x^2-x-1\right)\le 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<(x+4)^2<1$; $-5<x<-4$ или $-4<x<-3$. Тогда

$$3x^2-x-1\ge 1;\ \ (3x+2)(x-1)\ge 0,$$

откуда $x\le -\frac{2}{3}$ или $x\ge 1$.

При $0<(x+4)^2<1$ получаем

$$-5<x<-4 \text{ или } -4<x<-3.$$

Второй случай: $(x+4)^2>1$; $x<-5$ или $x>-3$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2-x-1>0,\\3x^2-x-1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)>0,\\(3x+2)(x-1)\le 0,\end{cases}$$

откуда $-\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1$.

Найденные решения удовлетворяют условию $(x+4)^2>1$.

Решение исходного неравенства:

$$-5<x<-4;\ -4<x<-3;\ -\frac{2}{3}\le x<\frac{1-\sqrt{13}}{6};\ \frac{1+\sqrt{13}}{6}<x\le 1.$$

Ответ: $(-5;-4)$; $(-4;-3)$; $\left[-\frac{2}{3};\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6};1\right]$.

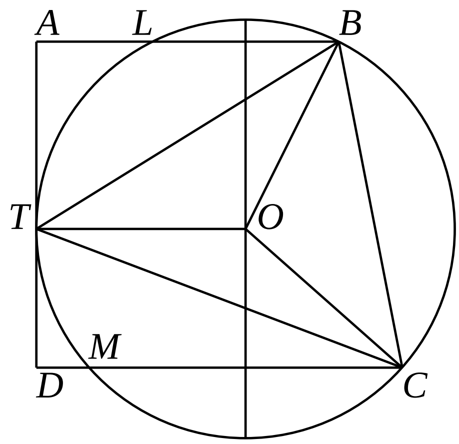
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 4 и 9 соответственно.

Решение.



а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD — в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда $AL = 2r - AB = 2r - 4$, $DM = 2r - CD = 2r - 9$.

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 4(2r-4)$. Следовательно,

$$TB^2 = 4(2r-4) + 4^2 = 8r.$$

Аналогично $TC^2 = 18r$

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h — искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin\angle BTC = \sqrt{8r} \cdot \sqrt{18r} \cdot \sin\angle BTC.$$

Следовательно, $h=\sqrt{4\cdot 9}=6$.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 69 510 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

<u>Решение.</u>

Пусть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма составляет a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1{,}1a-x\right)\cdot 1{,}1-x\right)\cdot 1{,}1-x=0,$$

откуда

$$1{,}1^3a-\left(1{,}1^2+1{,}1+1\right)x=0;\quad 3x=\frac{3\cdot 1{,}1^3a}{1+1{,}1+1{,}1^2}=\frac{3{,}993a}{3{,}31}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y = \frac{2\cdot 1{,}1^2 a}{1+1{,}1} = \frac{2{,}42a}{2{,}1}.$$

Подставляя $a = 69\,510$, получаем

$$3x - 2y = \frac{3{,}993\cdot 69\,510}{3{,}31} - \frac{2{,}42\cdot 69\,510}{2{,}1} =$$

$$= 3{,}993\cdot 21\,000 - 2{,}42\cdot 33100 = 83\,853 - 80\,102 = 3751.$$

Ответ: 3751 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x) = 0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x = 2y$ и $y = 2x$.

Второе уравнение при каждом $a \neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\ a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a = 0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 0$, то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение $\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}} = \frac{|a-2a|}{\sqrt{5}} = a^2\sqrt{5}$. Отсюда $a = \pm 0{,}2$.

Ответ: $a = \pm 0{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$?

Решение.

а) Пусть $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 2+1 = 3$, $a_4 = 1+3 = 4$, $a_5 = 3+4 = 7$ и $4a_5 = 7a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 8, 11, 19, 30, 49, \dots$ показывает, что равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $30a_6 = 49a_5$.

Пусть $n \ge 6$ и $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{6n} > 0$. Тогда $a_n = 6na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 6n + 24\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 12n - 24\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 18n + 48\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 10n + 24\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, получаем, что $n^2 - 10n + 24 = (n-4)(n-6) < 0$. Следовательно, $n = 5$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $6na_{n+1} = \left(n^2 + 24\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-x)=\sqrt{3}\sin x$.

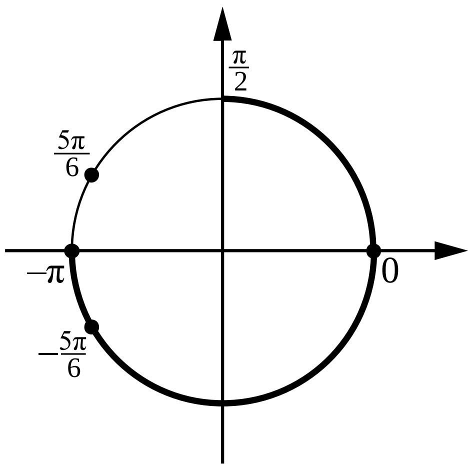
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sqrt{3}\sin x;\ \sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\right)=0.$$

Получаем $\sin x=0$ или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, где $n,k,m\in\mathbb{Z}$.



б) На отрезке $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=-\pi$, $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=0$.

Ответ: а) πn, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $n,k,m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

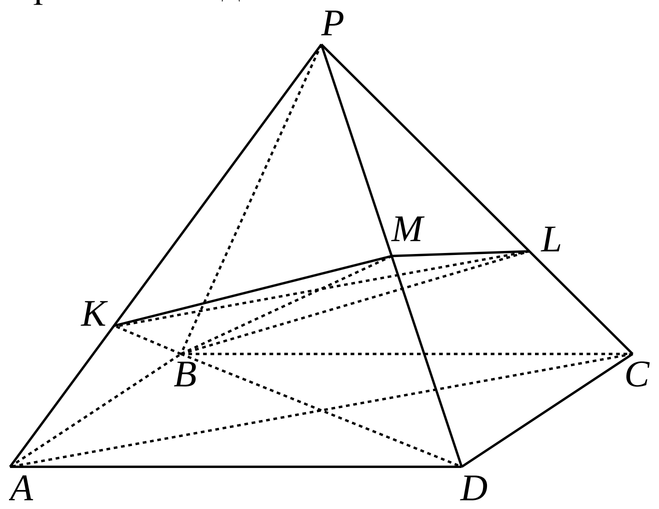
14 В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен $60°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

Решение.

а) Пусть M — середина PD. Так как прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD, отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, так как $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60°$, что и требовалось доказать.



б) Из доказанного следует, что $PA = 9\sqrt{2}$ и $BM = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$ как высота равностороннего треугольника BPD. Применяя теорему косинусов в треугольнике APD, получаем $81 = 324\left(1 - \cos\angle APD\right)$, откуда $\cos\angle APD = \dfrac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA, а точка L — на ребре PC). Так как отрезки KM и PD перпендикулярны, $PK = \dfrac{PM}{\cos\angle APD} = 6\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL = 6\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC. Поэтому $LK = 6\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, так как AC перпендикулярна плоскости BPD, а BM лежит в этой плоскости. Значит, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}BM \cdot KL = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{6}}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 27\sqrt{3}.$$

Ответ: $27\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\log_{(x-3)^2}\left(3x^2+7x+1\right)\ge 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<\left(x-3\right)^2<1$; $2<x<3$ или $3<x<4$. Тогда

$$\begin{cases}3x^2+7x+1>0,\\3x^2+7x+1\le 1;\end{cases}\quad \begin{cases}\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)>0,\\\left(3x+7\right)x\le 0;\end{cases}$$

откуда $-\dfrac{7}{3}\le x<-\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}$ или $-\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}<x\le 0$.

Найденные решения не удовлетворяют условию $0<\left(x-3\right)^2<1$.

Второй случай: $\left(x-3\right)^2>1$; $x<2$ или $x>4$. Тогда

$$3x^2+7x+1\ge 1;\ \left(3x+7\right)x\ge 0,$$

откуда $x\le -\dfrac{7}{3}$ или $x\ge 0$.

При $\left(x-3\right)^2>1$ получаем

$$x\le -\frac{7}{3},\ \text{или}\ 0\le x<2,\ \text{или}\ x>4.$$

Решение исходного неравенства:

$$x\le -\frac{7}{3};\ 0\le x<2;\ x>4.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\dfrac{7}{3}\right]$; $\left[0;2\right)$; $\left(4;+\infty\right)$.

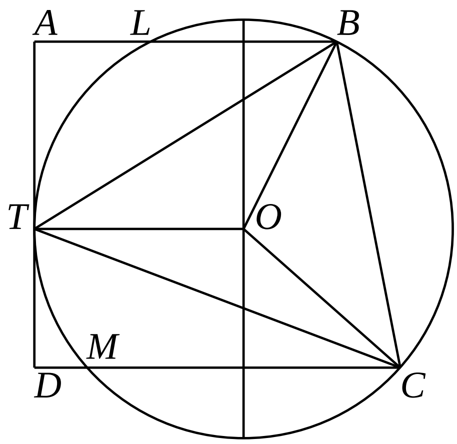
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O проходит через вершины B и C большей боковой стороны прямоугольной трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AD в точке T.

а) Докажите, что угол BOC вдвое больше угла BTC.

б) Найдите расстояние от точки T до прямой BC, если основания трапеции AB и CD равны 1 и 25 соответственно.

Решение.



а) Угол BTC вписан в окружность, а угол BOC — соответствующий ему центральный угол. Следовательно, $\angle BOC = 2\angle BTC$.

б) Из условия касания окружности и стороны AD следует, что прямые OT и AD перпендикулярны. Пусть окружность вторично пересекает сторону AB в точке L и сторону CD — в точке M. Тогда диаметр окружности, перпендикулярный стороне AB, делит каждую из хорд BL и CM пополам. Обозначим $OT = r$, тогда $AL = 2r - AB = 2r - 1$, $DM = 2r - CD = 2r - 25$.

По теореме Пифагора $TB^2 = AT^2 + AB^2$. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AB \cdot AL = 2r - 1$. Следовательно,

$$TB^2 = 2r - 1 + 1^2 = 2r.$$

Аналогично $TC^2 = 50r$

Из теоремы синусов следует, что $BC = 2r \cdot \sin\angle BTC$. Пусть h — искомое расстояние от точки T до прямой BC. Выразим площадь треугольника BTC двумя способами:

$$\frac{1}{2}h \cdot BC = \frac{1}{2}TB \cdot TC \cdot \sin\angle BTC.$$

Отсюда получаем, что

$$h \cdot 2r \cdot \sin \angle BTC = \sqrt{2r} \cdot \sqrt{50r} \cdot \sin \angle BTC .$$

Следовательно, $h = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 40 040 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма ежегодного платежа x рублей, а взятая в кредит сумма составляет a рублей. Получаем уравнение

$$\left(\left(1,2a - x\right) \cdot 1,2 - x\right) \cdot 1,2 - x = 0,$$

откуда

$$1,2^3 a - \left(1,2^2 + 1,2 + 1\right) x = 0; \quad 3x = \frac{3 \cdot 1,2^3 a}{1 + 1,2 + 1,2^2} = \frac{3 \cdot 1,728a}{3,64}.$$

Рассуждая аналогично, получим, что если бы долг выплачивали двумя равными платежами по y рублей, то общая сумма платежа равнялась бы

$$2y = \frac{2\cdot 1,2^2 a}{1+1,2} = \frac{1,44a}{1,1}.$$

Подставляя $a = 40\,040$, получаем

$$3x - 2y = \frac{3\cdot 1,728\cdot 40\,040}{3,64} - \frac{1,44\cdot 40\,040}{1,1} =$$

$$= 5,184\cdot 11\,000 - 1,44\cdot 36\,400 = 57\,024 - 52\,416 = 4608.$$

Ответ: 4608 руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 10a^4 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x) = 0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x = 3y$ и $y = 3x$.

Второе уравнение при каждом $a \neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\, a)$ и радиусом $a^2\sqrt{10}$.

Если $a = 0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 0$, то условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых, то есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности. Получаем уравнение $\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}} = \frac{|a-3a|}{\sqrt{10}} = a^2\sqrt{10}$. Отсюда $a = \pm 0,2$.

Ответ: $a = \pm 0,2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n.

а) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 9a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$?

<u>Решение.</u>

а) Пусть $a_1 = 3$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 3+1 = 4$, $a_4 = 1+4 = 5$, $a_5 = 4+5 = 9$ и $5a_5 = 9a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности $3, 3, 6, 9, 15, 24, \ldots$ показывает, что равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6 = 24a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{3n} > 0$. Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a$. Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \left(n^2 - 3n - 1\right)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = \left(-n^2 + 6n + 1\right)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = \left(2n^2 - 9n - 2\right)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3\left(n^2 - 5n - 1\right)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, получаем, что $n^2 - 5n - 1 < 0$. При $n \geq 6$ это неравенство не выполнено. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = \left(n^2 - 1\right)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта *а*; — обоснованное решение пункта *б*; — искомая оценка в пункте *в*; — пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4