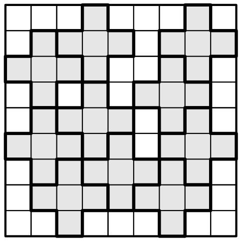
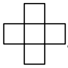
5 апреля **_Олимпиада им. Гаусса_** *2026 г.*

6 класс



1. Можно ли из клетчатого квадрата 9×9 вырезать 10 фигур ?

Ответ: Да, можно. Один из примеров на рисунке.

2. В школьной столовой в очереди стояло несколько учеников. Они купили в буфете вместе ровно 180 пирожков (кто-то из них мог не покупать пирожки). Вася сказал: «Какие-то двое учеников купили одинаковое число пирожков». При каком наименьшем количестве учеников в очереди Вася наверняка прав?

Решение: Поскольку все ученики купили разное число пирожков, то рассмотрим числа $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Их сумма равна $0+1+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

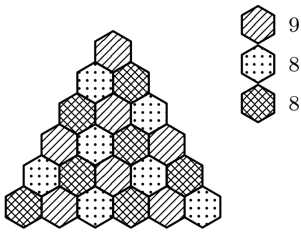
19 учеников хватает: например, они могли купить $0, 1, 2, \ldots, 18$ пирожков, т.е. $\frac{19\cdot 18}{2} = 171$.

При $n = 20$ получаем $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$. Это уже больше 180. Значит, при 20 учениках разные числа пирожков у всех быть не могут. Следовательно, при 20 учениках Вася наверняка прав.

Ответ: 20.

3. Можно ли треугольник из шестиугольников со стороной 6 разрезать на полоски, состоящие из трёх шестиугольников?

Решение: Нельзя.



Раскрасим фигуру в три цвета так, как показано справа. Тогда шестиугольников первого вида будет 9, а двух других видов — по 8.

Но в каждой полоске из трёх шестиугольников встречаются все три вида ровно по одному разу. Значит, если бы треугольник удалось разрезать на такие полоски, шестиугольников каждого вида было бы поровну. Противоречие.

Ответ: Нет.

4. В старом ботаническом саду растут 150 редких деревьев. Известно, что ровно 6 из них поражены таинственной болезнью. У каждого дерева установлен датчик, который после ночного анализа называет 4 дерева, на которых, по его мнению, есть эта болезнь. Известно, что датчик на здоровом дереве всегда безошибочно указывает 4 действительно больных дерева, а датчик на больном дереве называет какие угодно 4 дерева.

Докажите, что, собрав показания всех датчиков после одной ночи измерений, садовник сможет точно указать хотя бы одно больное дерево.

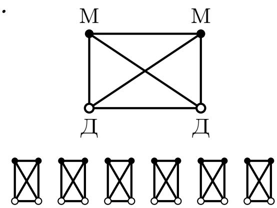
Решение: Здоровых деревьев $150 - 6 = 144$. Каждый здоровый датчик указывает 4 действительно больных дерева. Значит, всего датчики на здоровых деревьях указали больные деревья $144 \cdot 4 = 576$ раз.

Эти 576 упоминаний распределены между 6 больными деревьями. Поэтому хотя бы одно больное дерево было указано не меньше чем $576 : 6 = 96$ раз.

Теперь посмотрим на здоровое дерево. Его могут указать только датчики на больных деревьях. Больных деревьев всего 6, значит, здоровое дерево может быть названо не более 6 раз. Итак, есть дерево, которое назвали не меньше 96 раз. Здоровым оно быть не может, потому что здоровое дерево можно назвать не более 6 раз. Значит, это дерево больное.

Ответ: Например, можно взять дерево, которое назвали больше всех раз.

5. В классе 24 человека. Каждый ребёнок дружит ровно с одним ребёнком того же пола и ровно с двумя детьми другого пола. Какое наибольшее число троек детей, состоящих из двух мальчиков и одной девочки, можно выбрать так, чтобы в каждой такой тройке каждый ребёнок дружил с двумя остальными? *Считается, что если ребёнок A дружит с ребёнком B, то и ребёнок B дружит с ребёнком A.*



Решение: Рассмотрим такую тройку: два мальчика в ней дружат друг с другом, значит, это как раз та единственная пара мальчиков, в которой каждый из них дружит с ребёнком своего пола. Следовательно, такая тройка полностью определяется парой мальчиков и девочкой, которая дружит с обоими.

У каждой пары мальчиков может быть не больше двух таких девочек, потому что у каждого мальчика ровно две подруги. Значит, число нужных троек не больше, чем удвоенное число пар мальчиков. Поэтому число троек не больше числа мальчиков.

При этом каждая девочка может входить не более чем в одну такую тройку: у неё ровно два друга-мальчика, и если они дружат друг с другом, то получается ровно одна тройка. Т.е. число троек $\leq$ и числа девочек.

Пример на 12 есть: возьмём 12 мальчиков и 12 девочек, разобьём их на 6 групп по 2 мальчика и 2 девочки. Пример приведён на рисунке.

Ответ: 12.

6. На тарелке лежат карточки с числами $1, 2, \ldots, 25$. Два игрока по очереди убирают по одной карточке. Когда на тарелке останутся три карточки, игра заканчивается. Если сумма чисел на этих трёх карточках делится на 3, выигрывает первый игрок, иначе выигрывает второй. Кто из игроков может выиграть при правильной игре? *Нужно объяснить, какой игрок может добиться победы независимо от ходов соперника, и объяснить, почему предложенная стратегия действительно всегда приводит его к победе.*

Решение: Рассмотрим остатки чисел на карточках по модулю 3. Изначально среди чисел $1, 2, \ldots, 25$ имеются

$$8 \text{ карточек с остатком } 0, 9 \text{ карточек с остатком } 1, 8 \text{ карточек с остатком } 2.$$

Первый игрок хочет добиться того, чтобы после последнего хода второго сумма трёх оставшихся карточек делилась на 3.

Ключевой момент — ситуация после 21-го хода первого, когда на столе остаются 4 карточки. Второй затем уберёт одну из них. Значит, первый должен оставить такую четвёрку, чтобы *после удаления любой одной карточки* сумма трёх оставшихся делилась на 3.

Пусть остатки этих четырёх карточек равны r_1, r_2, r_3, r_4, а их сумма равна S. Тогда для каждого i должно выполняться

$$S - r_i \equiv 0 \pmod 3.$$

Следовательно,

$$r_i \equiv S \pmod 3$$

для всех i, то есть

$$r_1 \equiv r_2 \equiv r_3 \equiv r_4 \pmod 3.$$

Итак, **первый может гарантировать победу только в том случае, если после его 21-го хода останутся 4 карточки одного и того же остатка по модулю 3.**

Покажем, что второй не даст этого сделать. Для этого он будет каждый раз убирать карточку того остатка, которого в данный момент больше всего.

Докажем, что после каждого хода второго количества карточек трёх остатков отличаются не более чем на 1. Вначале это верно: имеем распределение

$$8, 9, 8.$$

После хода первого одно из этих чисел уменьшается на 1, поэтому разность между наибольшим и наименьшим количеством может увеличиться не более чем на 1. Затем второй уменьшает на 1 одно из наибольших количеств, и разность снова становится не больше 1.

Значит, перед 21-м ходом первого, когда на столе останется 5 карточек, количества карточек трёх остатков могут иметь только вид

$$2, 2, 1$$

(в некотором порядке). Но тогда первым одним ходом нельзя оставить 4 карточки одного и того же остатка: после удаления одной карточки получится распределение либо $2, 2, 0$, либо $2, 1, 1$.

Следовательно, первый не сможет оставить выигрышную четвёрку. Значит, второй своим последним ходом сможет выбрать карточку так, чтобы сумма трёх оставшихся *не* делилась на 3.

Ответ: Выигрывает второй игрок.