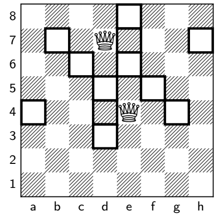
5 класс

1. Можно ли поставить на шахматную доску 8×8 два ферзя, не бьющих друг друга, так, чтобы под боем обеих фигур находилось 12 клеток? *Ферзь бьёт все клетки своего ряда, столбца и обеих диагоналей, кроме клетки, на которой стоит.*



Решение: Можно. Например, поставить ферзей на клетки $d7$ и $e4$. Справа отмечены клетки, которые бьют оба ферзя; их ровно 12.

Ответ: Да, можно.

2. У Пеппи 11 конфет. У Томми конфет меньше, чем у Пеппи. У Анники — столько же, сколько у Пеппи и Томми вместе. Известно, что все конфеты можно разложить поровну по 3 одинаковым пакетам (в каждом пакете целое число конфет). Каким может быть общее число конфет? *Укажите все возможные варианты.*

Решение: Пусть у Томми x конфет. Тогда $x < 11$.

У Анники $11+x$ конфет, значит, всего конфет $11+x+11+x = 22+2x$.

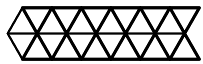
Это число делится на 3. Так как 22 при делении на 3 даёт остаток 1, то и $2x$ должно давать остаток 2. Значит, x при делении на 3 даёт остаток 1.

При $x < 11$ это возможно только для $x = 1, 4, 7, 10$.

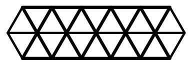
Тогда всего конфет: $22 + 2 \cdot 1 = 24$, $22 + 2 \cdot 4 = 30$, $22 + 2 \cdot 7 = 36$, $22 + 2 \cdot 10 = 42$.

Ответ: $24, 30, 36, 42$.

3. Сколькими способами можно замостить ромбами **(а)** верхнюю полоску? **(б)** нижнюю полоску?



(а)



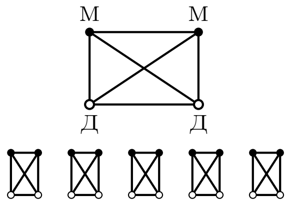
(б)

Решение: В верхней полоске правый выступ замощается только одним способом. После этого справа снова возникает вынужденный ромб, потом ещё один, и так далее. Значит, всё замощение единственно.

В нижней полоске есть ровно одно место, где ромб “перекрывает” полоску сверху вниз. Его можно поставить в любом из 6 мест. После этого все остальные ромбы уже расставляются единственным образом. Значит, нижнюю полоску можно замостить 6 способами.

Ответ: а) 1; б) 6.

4. В классе 20 человек. Каждый ребёнок дружит ровно с одним ребёнком того же пола и ровно с двумя детьми другого пола. Назовём *сплочённой четвёркой* группу из четырёх детей, в которой каждый дружит с каждым. Какое наибольшее число сплочённых четвёрок может быть в классе? *Считается, что если ребёнок А дружит с ребёнком В, то и ребёнок В дружит с ребёнком А.*



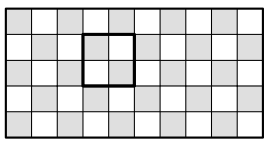
Решение: В сплочённой четвёрке не может быть троих детей одного пола: тогда среди них нашёлся бы ребёнок, который дружит с двумя детьми своего пола, а по условию он дружит ровно с одним ребёнком своего пола. Значит, каждая сплочённая четвёрка состоит из двух мальчиков и двух девочек.

Если ребёнок входит в сплочённую четвёрку, то эта четвёрка определяется однозначно. Действительно, в ней его единственный друг того же пола уже известен, и два его друга другого пола тоже известны. Значит, ни в какую другую сплочённую четвёрку этот ребёнок входить не может. Т.е., сплочённые четвёрки не пересекаются $\Rightarrow$ их $\leq 20 : 4 = 5$.

Пример на 5: разобьём 10 мальчиков и 10 девочек на 5 групп по 2 мальчика и 2 девочки и в каждой группе соединим дружбой всех со всеми.

Ответ: 5.

5. На доске размером 5×10 клеток в каждой клетке написано число 1. За одну операцию можно выбрать любой квадрат 2×2 клетки, в одной из его клеток уменьшить написанное в ней число на 1, а числа, написанные в трёх остальных клетках, увеличить на 1 каждое. Можно ли после нескольких таких операций получить в каждой клетке доски число 100?

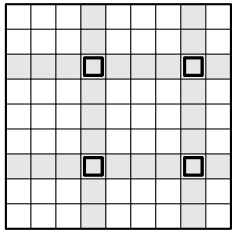


Решение: Раскрасим доску в шахматном порядке. Чёрных клеток 25. Сначала во всех клетках стоит 1, значит, во всех 25 чёрных клетках стоят нечётные числа. Поэтому число таких чёрных клеток нечётно.

За одну операцию меняются числа во всех четырёх клетках квадрата 2×2. Среди них ровно две чёрные клетки. В них чётность чисел меняется, значит, число чёрных клеток с нечётными числами изменяется на 0 или на 2. Следовательно, его чётность не меняется. Значит, это число всё время остаётся нечётным.

Но если бы во всех клетках стало по 100, то во всех чёрных клетках стояли бы чётные числа, и число чёрных клеток с нечётными числами стало бы равно 0, то есть было бы чётным. Противоречие.

6. Имеется 81 ампула, среди которых ровно две заражены. В лаборатории можно проводить проверки: за одну проверку выбирают не более 9 ампул, после чего тест показывает, есть ли среди выбранных ампул хотя бы одна заражённая. Как заранее назначить 18 проверок так, чтобы после их проведения по результатам всех проверок можно было указать не более четырёх ампул, среди которых обязательно находятся обе заражённые? *Нужно объяснить, как по результатам всех* 18 *проверок определить эти четыре (или меньше) ампулы. При этом ни при какой проверке не могут учитываться результаты предыдущих проверок.*



Решение: Расположим все 81 ампулу в таблицу 9×9.

Сделаем 9 проверок по строкам: в каждой проверке проверяем все ампулы одной строки.

Ещё 9 проверок сделаем по столбцам: в каждой проверке проверяем все ампулы одного столбца.

Всего получится 18 проверок, и в каждой проверяется ровно 9 ампул.

После проверок посмотрим, какие строки дали положительный ответ и какие столбцы дали положительный ответ.

Так как заражённых ампул ровно две, положительных строк не больше двух и положительных столбцов не больше двух.

Значит, обе заражённые ампулы лежат на пересечении положительных строк и положительных столбцов. Таких клеток не больше, чем $2 \cdot 2 = 4$.

Итак, по результатам всех проверок можно указать не более четырёх ампул, среди которых обязательно находятся обе заражённые.

Ответ: Например, разбить ампулы в таблицу 9×9 и проверить все 9 строк и все 9 столбцов.