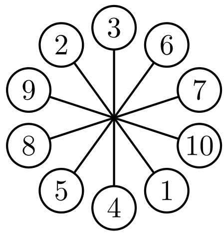
4 класс

1. В кружочки на рисунке впишите числа $1, 2, \ldots, 10$ (каждое ровно один раз) так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была равна сумме двух чисел, соединённых с ними отрезками (т.е., к примеру, $A + B = 2 + 9 = 11$). Какие числа стоят в оставшихся кружочках?

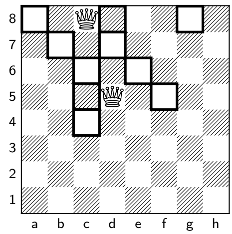
Ответ: На картинке.



(а)

2. Можно ли поставить на шахматную доску 8×8 два ферзя, не бьющих друг друга, так, чтобы под боем обеих фигур находилось 10 клеток? *Ферзь бьёт все клетки своего ряда, столбца и обеих диагоналей, кроме клетки, на которой стоит.*

Ответ: Да, можно.



(б)

3. У Карлсона было 7 плюшек. У Малыша было меньше плюшек, чем у Карлсона, а у Фрекен Бок — столько же, сколько у Карлсона и Малыша вместе. Потом Карлсон отдал Малышу несколько плюшек так, что у Малыша стало ровно в 2 раза меньше, чем у Карлсона. Каким могло быть общее число плюшек? *Укажите все возможные варианты.*

Решение: После выполнения действий у Малыша стало в 2 раза меньше плюшек, чем у Карлсона. Значит, все плюшки Карлсона и Малыша теперь можно разбить на 3 равные части: 2 части у Карлсона и 1 — у Малыша. Значит, число плюшек у Карлсона и Малыша вместе должно делиться на 3.

У Карлсона было 7 плюшек, у Малыша — меньше 7, то есть могло быть $0, 1, 2, 3, 4, 5$ или 6 плюшек. Тогда всего у них вместе могло быть от 7 до 13 плюшек. Из чисел $7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ на 3 делятся только 9 и 12.

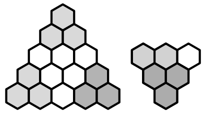
Число 9 подходит: тогда у Малыша сначала было 2 плюшки. Чтобы из 7 и 2 получить 6 и 3, Карлсон должен отдать 1 плюшку. Итак, всего было $7 + 2 + 9 = 18$ плюшек.

Число 12 не подходит: тогда у Малыша сначала было 5 плюшек. После передачи должно стать 8 и 4. Но из 7 плюшек нельзя, отдав несколько плюшек, получить 8.

Ответ: 18.

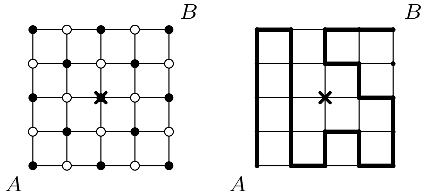
4. Можно ли разрезать фигуру справа, состоящую из 15 шестиугольников, на фигурки, состоящие из трёх шестиугольников?

Решение: Нельзя.



(в)

Верхний шестиугольник можно покрыть только одной фигуркой. Точно так же вынуждены фигурки в двух нижних углах. Они показаны справа.



(г)

После удаления этих трёх фигурок остаются 6 шестиугольников. Теперь нижний шестиугольник можно покрыть только одной фигуркой, а крайний левый верхний из оставшихся — тоже только одной фигуркой. Но эти две фигурки пересекаются. Значит, оставшуюся часть разрезать нельзя. Следовательно, и всю исходную фигуру разрезать нельзя.

Ответ: Нет.

5. В городе 25 перекрёстков, расположенных в виде решётки 5×5: точки пересечения линий — это перекрёстки, а отрезки между соседними перекрёстками — улицы. Ходить можно только по таким улицам. Центральный перекрёсток закрыт на ремонт: его нельзя посещать и через него нельзя проходить (см. рисунок). Пингвинёнок Плюх идёт из A в B и не заходит дважды на один перекрёсток. Какое наибольшее число улиц может содержать его маршрут?

Решение: Раскрасим перекрёстки в шахматном порядке. Тогда A и B будут одного цвета. Центральный закрытый перекрёсток тоже этого цвета.

После закрытия центра остаётся 24 перекрёстка: по 12 каждого цвета.

При каждом шаге цвет меняется. Поэтому если маршрут начинается и кончается в точках одного цвета, то перекрёстков этого цвета в маршруте на 1 больше.

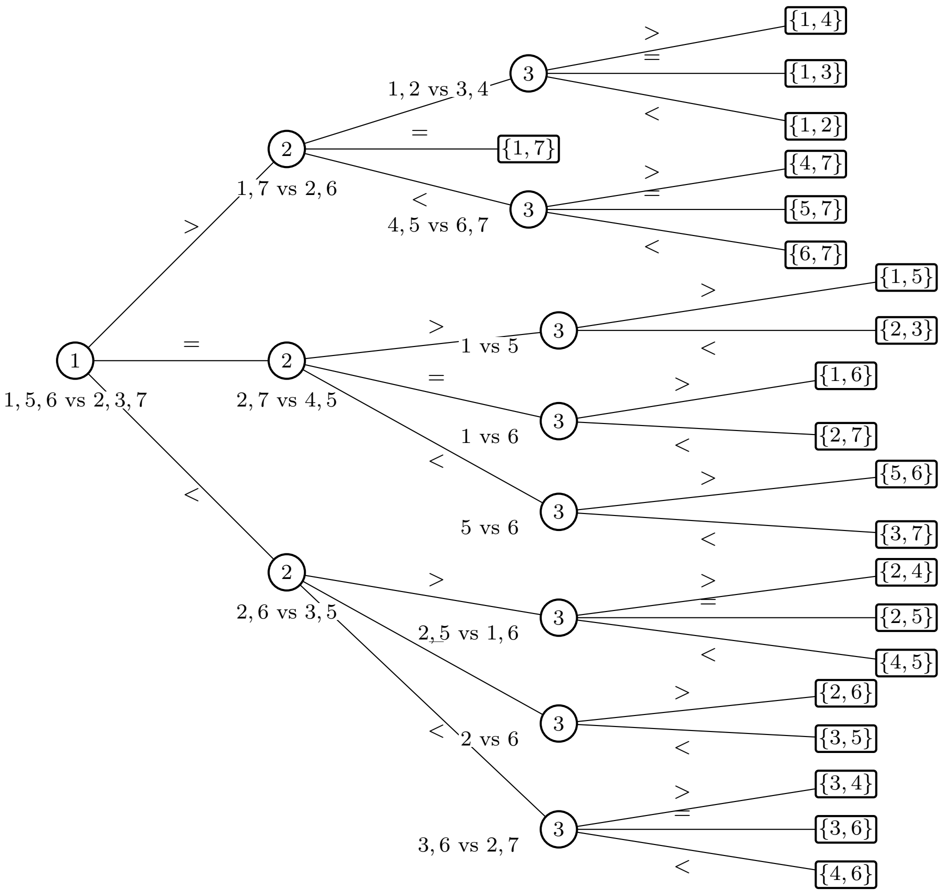
Значит, пройти через все 24 перекрёстка нельзя: тогда чёрных и белых перекрёстков в маршруте было бы поровну. Следовательно, можно посетить не более 23 перекрёстков, то есть пройти не более 22 улиц.

Пример маршрута длины 22 показан справа. Значит, наибольшее возможное число улиц равно 22.

Ответ: 22.

6. В музее лежат семь одинаковых на вид жетонов массами $31, 32, \ldots, 37$ г. Жетон массой 31 г должен лежать в ячейке 1, жетон массой 32 г — в ячейке 2, $\ldots$, жетон массой 37 г — в ячейке 7. После ремонта два жетона оказались переставлены местами, а остальные лежат правильно. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какие две ячейки перепутаны? *Весы показывают только, какая чашка тяжелее. На каждую чашку можно класть один или несколько жетонов.*

Решение: Дерево ниже показывает, какие три взвешивания делать дальше после каждого результата.



В каждом листе записана ровно одна пара ячеек, причём все пары разные. Значит, по трём взвешиваниям можно однозначно определить, какие две ячейки перепутаны.

Ответ: Да, можно.